الأدهم
فى
الجبر وحساب المثلثات
الصف الأول الثانوى
عام وأزهر
٢٠٢٠
هدية
مجانية
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الأول : حل معدلات الدرجة الثانية فى متغير واحد

هنتعلم أية ؟ الدرس ده ؟؟

هنتعلم حل المعادلات بطريقتين

أ) الطريقة الجبرية

* بالتحليل
* بالقانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

ب) الطريقة البيانية

هنرسم منحنى الدالة التربيعية ونحدد نقط التقاطع مع محور السينات

مثال ١ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات التالية

(١) $س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$

٦ × ١
٣ × ٢

الحل

$(س - ٢)(س - ٣) = ٠$

إما $س - ٢ = ٠$ ومنها $س = ٢$ | أو $س - ٣ = ٠$ ومنها $س = ٣$

$\therefore$ م.ح = $\{٢ ، ٣\}$

(٢) $س^٣ - ٢٧ = ٠$

الحل

$س^٣ = ٢٧$ بأخذ $\sqrt[٣]{}$

$\therefore س = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

$\therefore$ م.ح = $\{٣\}$

(٣) $س^٢ - ٢٥ = ٠$

الحل

$س^٢ = ٢٥$ بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين

متنساش $\sqrt{}$ بيكون معاه $\pm$

$\therefore س = \pm\sqrt{٢٥}$ ، $س = \pm ٥$

$\therefore$ م.ح = $\{\pm ٥\}$

(٤) $س^٢ + ٩ = ٠$

الحل

$س^٢ = -٩$ بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين

$س = \pm\sqrt{-٩}$ مرفوض

لأنه لا يوجد $\sqrt{}$ لعدد سالب

$\therefore$ م.ح = ϕ

(٥) $س + \frac{٥}{س} = ٤$

الحل

بالضرب × س

$س^٢ + ٥ = ٤س$

$س^٢ - ٤س + ٥ = ٠$

خلى بالك مفيش عددين حاصل ضربهما ٥ ومجموعهما ٤ لذلك دى هتتحل بالقانون العام "فاكرينه؟"

$س^2 - ٤س + ٥ = ٠$

$أ = ١$ $ب = -٤$ $جـ = ٥$

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$

$\therefore س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$

$\therefore \sqrt{-٤} \notin ح$ مفيش جذر تربيعى لعدد سالب

$\therefore م.ح = \phi$

تدريب حل المعادلات التالية فى ح

1. $س^2 + ٣س = ٠$
2. $س^2 + ٥س - ٦ = ٠$
3. $س^2 - ٦س + ٩ = ٠$
4. $٢س^2 + ٣س - ٤ = ٠$
5. $٥س^2 - ٣س - ١ = ٠$
6. $س - \frac{٥}{س} = ٣$ ، $س \neq ٠$

من عجائب الرياضيات.
اضرب عمرك في
13837
اضرب النتيجة في 73
ستدهش للنتيجة

ثانياً : الحل البيانى

عندنا ٣ حالات

١- المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين.
يوجد حلان مختلفان للمعادلة في ح، مجموعة الحل = {ل، م}

٢- المنحنى يمس محور السينات في نقطة واحدة.
يوجد حلان متساويان للمعادلة في ح، مجموعة الحل = {ل}

٣- المنحنى لا يقطع محور السينات.
لا يوجد حلٌّ للمعادلة في ح، مجموعة الحل = ϕ

مثال ٢ أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات التالية بيانياً

(١) $س^2 - ٢س - ٣ = ٠$ $[-٢ ، ٤]$

الحل

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

من الرسم م.ح = {-١ ، ٣}

لو عايز تجيبها من الجدول هى قيم س التى تقابل ص = ٠

(٢) $س^2 - ٤س - ٤ = ٠$ $[-٥ ، ١]$

الحل

س	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١
ص	-٩	-٤	-١	٠	-١	-٤	-٩

من الرسم

م.ح = {-٢}

③ $س^٢ + ١$ [-٢، ٢]

الحل

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٥	٢	١	٢	٥

من الرسم

∴ م.ح = Φ

ملحوظة

$أس^٢ + ب س + جـ = ٠$

إحداثيات رأس المنحنى

$\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

مثال ٢ عين إحداثيات رأس المنحنيات التالية

$س^٢ + ٢س - ١ = ٠$

الحل

أ = ١   ب = ٢

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢}{٢ \times ١} = \frac{-٢}{٢} = -١$

$د(-١) = (-١)^٢ + ٢(-١) - ١ = -٢$

∴ رأس المنحنى (-١، -٢)

يعني أيه جذر للمعادلة

معناه أنى أعوض عن س بالرقم اللى قاله ويبقى قيمة المعادلة = صفر

لأن جذر المعادلة هو حل المعادلة يعني قيمة س عندما ص = صفر

مثال ٣ إذا كان س = ٣ أحد جذري المعادلة $س^٢ + أس + ٦ = ٠$. فأوجد الجذر الآخر

الحل

بوضع س = ٣

$٩ + ٣أ + ٦ = ٠$ $٣أ = -١٥$

∴ $أ = \frac{-١٥}{٣} = -٥$

$$6 \times 1$$
$$2 \times 3$$

∴ المعادلة هى

$س^2 - 5س + 6 = 0$

$(س - 2)(س - 3) = 0$

$س = 2$ أو $س = 3$

∴ الجذر الآخر $= 2$

مثال ٤

إذا كان ٥ ، -٣ هما جذرا المعادلة $س^2 + م س + ب = 0$ فأوجد م ، ب

الحل

بوضع $س = 5$

$∴ 25 + 5م + ب = 0 \leftarrow (1)$

بوضع $س = -3$

$9 - 3م + ب = 0 \leftarrow (2)$

بالطرح

$5م + ب = -25$
$-3م + ب = -9$

$8م = -16$ ∴ $م = \frac{-16}{8} = -2$

بالتعويض فى (1)

$25 - 10 + ب = 0$

$ب + 15 = 0$

∴ $ب = -15$

∴ $م = -2$ ، $ب = -15$

أى خدمة

مثال ٥ أكمل

(١) المعادلة $(س - 3)(س + 4) = 0$ من الدرجة ...... الثانية

(٢) مجموعة حل المعادلة $س^2 - 2س = 0$ هى ......

$س(س - 2) = 0$

$م.ح = \{0 ، 2\}$

(٣) مجموعة حل المعادلة $س^2 + 100 = 0$ فى ح

$س^2 = -100$ $س = \sqrt{-100}$ مرفوض

$م.ح = \Phi$

(٤) مجموعة حل المعادلة $س^2 - 5 = 0$ فى ح

$س^2 = 5$ $س = \pm\sqrt{5}$

$∴ م.ح = \{\pm\sqrt{5}\}$

(٥) إذا كان منحنى الدالة التربيعية يقطع محور السينات فى $(3 ، 0)$ ، $(-4 ، 0)$ فإن م.ح = ...

$\{-4 ، 3\}$ ← لازم تكون مجموعة

(٦) إذا كان منحنى الدالة التربيعية يمر بالنقط $\{(-1 ، 0) ، (0 ، -3) ، (1 ، -4) ، (3 ، 0)\}$ فإن $م.ح = \{-1 ، 3\}$

قيم س عندما ص = ٠

مثال ٦

اختر الإجابة الصحيحة

① الشرط الذى يجعل المعادلة $أس^2 + ب س + جـ = ٠$ تربيعية هو ....

(أ) $أ > ٠$ (ب) $أ < ٠$

(جـ) $أ \neq ٠$ (د) $أ \neq ٠ ، ب \neq ٠$

---

② إذا كان $(ص - ٤)^2 = ٣٦$ ، $ص < ٠$

فإن $ص + ٤ = ...$

(أ) -٢ (ب) ٢

(جـ) ١٠ (د) ١٤

الحل ← $ص - ٤ = \pm ٦$

$ص - ٤ = ٦$ ، $ص - ٤ = -٦$

$ص = ٦ + ٤$ ، $ص = -٦ + ٤$

$ص = ١٠$ مرفوض ، $ص = -٢$ < ٠

$\therefore ص + ٤ = -٢ + ٤ = ٢$

---

③ إذا كانت $س = ٤$ أحد جذرى المعادلة $س^2 + م س = ٤$ فإن ...

(أ) $م = -٣$ (ب) م عدد زوجى

(جـ) $(١ - م)$ مربع كامل (د) (أ) ، (جـ) صحيحان

بالتجريب $م = -٣$ تحقق $\therefore$ أ صحيحة

$١ - (-٣) = ٤$ مربع كامل $\therefore$ جـ صحيحة

---

④ الجذر المشترك للمعادلتين التربيعيتين

$س^2 - ٣ س + ٢ = ٠$ ، $٢ س^2 - ٥ س + ٢ = صفر$

(أ) $س = ٢$ (ب) $س = ١$

(جـ) $س = -٢$ (د) $س = \frac{١}{٢}$

بالتعويض في مقطع أو حل كل معادلة.

---

⑤ الشكل المقابل يمثل المنحنى

$ص = أ س^2 + ب س + جـ$

(أ) $أ > ٠ ، جـ > ٠$

(ب) $أ > ٠ ، جـ < ٠$

(جـ) $أ < ٠ ، جـ > ٠$

(د) $أ < ٠ ، جـ < ٠$

لأن المنحنى مفتوح لأسفل والجذران مختلفان فى الإشارة فلابد أن يكون حاصل ضربهما سالب

$\frac{جـ}{أ}$ سالب $\therefore جـ > ٠$ لـه فى البعد الموجب

---

⑥ قطعة أرض على شكل مستطيل بعداه ٦ ، ٩ م يراد مضاعفة هذه المساحة وذلك بزيادة كل من بعديها بنفس المسافة فإن المسافة ...

(أ) ٣ (ب) ٥

(جـ) ٧ (د) ٩

$٦ \times ٩ = ٥٤$ بالمضاعفة يبقى ١٠٨

$(٦ + س)(٩ + س) = ١٠٨$

نوجد أو حل مقطع $س = ٣$

هنتعلم أيه الدرس ده

١- يعنى أيه عدد تخيلى
٢- ازاى أضع العدد التخيلى فى أبط صورة
٣- مجموعة الاعداد المركبة
٤- نعيش شوية مع الاعداد المركبة

هيا نبدأ وتوكلنا على الله

العدد التخيلى

هو العدد الذى مربعه = -١

∴ $ت^٢ = -١$

$ت = \sqrt{-١}$

ومن ذلك

$\sqrt{-٢} = \sqrt{٢}\ ت$

$\sqrt{-٥} = \sqrt{٥}\ ت$

$\sqrt{-٣} = \sqrt{٣}\ ت$

ملحوظة

$\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٦}$ ولكن أنتبه

$\sqrt{-١} \times \sqrt{-١} \neq \sqrt{-١ \times -١}$

$ت \times ت = ت^٢ = -١$

لذلك نعمم القاعدة

إذا كان أ ، ب عددان حقيقيان سالبان

فإن $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} \neq \sqrt{أ ب}$

مثال

① $\sqrt{-٣} \times \sqrt{-٥} = \sqrt{٣}\ ت \times \sqrt{٥}\ ت$

$= \sqrt{١٥}\ ت^٢ = \sqrt{١٥} \times -١ = -\sqrt{١٥}$

② $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٧} = \sqrt{٢}\ ت \times \sqrt{٧}\ ت$

$= \sqrt{١٤} \times ت^٢ = -\sqrt{١٤}$

$ت = ت$

$ت^٢ = -١$

$ت^٣ = -ت$

$ت^٤ = ١$

دى دورة تتكرر كل ٤

سؤال مهم ازاى اجيب ت فى أبط صورة

إذا كان الاس موجب هنطرح أول عدد تحته مباشرة يقبل القسمة على ٤

وإذا كان الأس سالب هجمع عليه
أول عدد موجب يقبل القسمة على ٤
فتعالوا نحل و هنفهم إن شاء الله

مثال ١ أوجد فى أبسط صورة

١) $ت^{٨} = ١$ لأنه ٨ تقبل على ٤ بدون باقي

٢) $ت^{-١٦} = ١$ لأنه -١٦ // // بدون باقي

٣) $ت^{٤ن} = ١$ لأنه ٤ن // // //

٤) $ت^{-٤م} = ١$ لأنه -٤م تقبل // بدون //

٥) $ت^{٥} = ت^{٥-٤} = ت^{١} = ت$

٦) $ت^{١٣} = ت^{١٣-١٢} = ت^{١} = ت$

٧) $ت^{٩١} =$ ....

٨) $ت^{١٨} = ت^{١٨-١٦} = ت^{٢} = -١$

٩) $ت^{٢٢} = ت^{٢٢-٢٠} = ت^{٢} = -١$

١٠) $ت^{٣٤} =$ ------

١١) $ت^{١١} = ت^{١١-٨} = ت^{٣} = -ت$

١٢) $ت^{١٥} = ت^{١٥-١٢} = ت^{٣} = -ت$

١٣) $ت^{٣١} =$ ------

١٤) $ت^{٤ن+١} = ت^{١} = ت$

١٥) $ت^{٨ن+٢} = ت^{٢} = -١$

١٦) $ت^{٤٠ن+٧} = ت^{٧} = ت^{٧-٤} = ت^{٣} = -ت$

النوع ده كده اتفهم كويس ؟

مثال ٢ أوجد فى أبسط صورة

١) $ت^{-٤} = ١$ لأنه -٤ تقبل على ٤ بدون باقي

٢) $ت^{-٨} = ١$ -- -- -- // //

٣) $ت^{-١٢ن} = ١$

٤) $ت^{-٣} = ت^{-٣+٤} = ت^{١} = ت$

٥) $ت^{-٥} = ت^{-٥+٨} = ت^{٣} = -ت$

٦) $ت^{-٧} = ت^{-٧+٨} = ت^{١} = ت$

٧) $ت^{-١١} = ت^{-١١+١٢} = ت^{١} = ت$

٨) $ت^{-١٤} = ت^{-١٤+١٦} = ت^{٢} = -١$

٩) $ت^{-٢٢} = ت^{-٢٢+٢٤} = ت^{٢} = -١$

١٠) $ت^{٤ن-٩} = ت^{-٩+١٢} = ت^{٣} = -ت$

١١) $ت^{١٠٠ن-١٥} = ت^{-١٥} = ت^{-١٥+١٦} = ت$

مجموعة الأعداد المركبة

العدد المركب أ + ب ت

الجزء الحقيقي ، الجزء التخيلي

لاحظ أن

١) إذا كان أ = ٠ يبقى العدد تخيلي

٢) إذا كان ب = ٠ يبقى العدد حقيقي

النهاردة بإذن الله هنضيف مجموعة جديدة للأعداد وهي مجموعة الأعداد المركبة

ك = {أ + ب ت : أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، $ت^2 = -1$}

∴ ع ⊂ ط ⊂ ص ⊂ ن ⊂ ح ⊂ ك

أوجد في ك م.ح لكل مما يلي

$س^2 + 25 = 0$

الحل

$س^2 = -25$

$س = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25 ت^2}$

$= \pm 5ت$

∴ م.ح = {± ٥ت}

$2س^2 + 18 = 0$

الحل

$2س^2 = -18$ ÷ ٢

$س^2 = -9$ بأخذ √

$س = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9 ت^2}$

$= \pm 3ت$

∴ م.ح = {٣ت ، -٣ت}

سؤال رفيع
متى يتساوى العددان المركبان

جـ
عندما يتساوى الجزء الحقيقي مع الحقيقي
و يتساوى الجزء التخيلي مع التخيلي

أوجد قيم س ، ص

١) س + ص ت = ٤ - ٣ت

س = ٤ ، ص = -٣

٢) س - ٥ت = ٤ - ص ت

س = ٤ ، ص = ٥

٣) س + ص ت = (٣ + ٢ت) + (٢ - ت)

س + ص ت = ٥ + ت

س = ٥ ، ص = ١

أيه رأيكم ناخد تمرين شامل كل العمليات على الأعداد المركبة

أوجد في أبسط صورة يا حج

١) (٣ + ٥ت) + (٤ - ٢ت)

= ٧ + (٥ - ٢)ت

= ٧ + ٣ت

٢) $(٢ - ت) - (٥ + ت)$

الحل

$٢ - ت - ٥ - ت$

$= (٢ - ٥) + (-١ - ١)ت$

$-٣ - ٢ت$

---

٣) $(٤ + ٢ت)(٣ - ٥ت)$

الحل

$١٢ - ٢٠ت + ٦ت - ١٠ت^2$

$١٢ - ١٤ت - (١٠ \times -١)$

$٢٢ - ١٤ت$

---

٤) $(٣ + ٢ت)^2$

الحل

$(٣ + ٢ت)(٣ + ٢ت)$

$٩ + ٦ت + ٦ت + ٤ت^2$

$٩ + ١٢ت + (٤ \times -١)$

$٥ + ١٢ت$

وممكن تتحل مربع كامل

$(أ \pm ب)^2 = أ^2 \pm ٢أب + ب^2$

---

٥) $(١ - ت)^4$

الحل

$((١ - ت)^2)^2$

$(١ - ٢ت + ت^2)^2$

$(١ - ٢ت - ١)^2$

$(-٢ت)^2 = ٤ت^2 = -٤$

---

٦) $ت(٥ - ٣ت)$

الحل

$٥ت - ٣ت^2 = ٥ت + ٣$

$= ٣ + ٥ت$

---

٧) $(٢ - ت)(٢ + ت)$

الحل

فرق بين مربعين $(أ - ب)(أ + ب)$

$= أ^2 - ب^2$

$٤ - ت^2 = ٤ - (-١) = ٥$

---

٨) $(٣ - ت)(٣ + ت)$

الحل

$٩ - ت^2 = ٩ - (-١) = ١٠$

إِنَّ ٱللَّهَ وَمَلَٰٓئِكَتَهُۥ
يُصَلُّونَ عَلَى ٱلنَّبِيِّۚ
يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ صَلُّواْ عَلَيۡهِ
وَسَلِّمُواْ تَسۡلِيمًا

العددان المترافقان

لاستنتاج المرافق نغير اشارة الجزء التخيلى

$أ + ب ت$ ← مرافقه ← $أ - ب ت$

لاحظ

العدد	المرافق
① $٥ + ٢ت$	$٥ - ٢ت$
② $٤ - ت$	$٤ + ت$
③ $ت - ٢$ أصلها ← $-٢ + ت$ ← المرافق	$-٢ - ت$
④ $٣ت + ٥$ أصلها $٥ + ٣ت$ ← المرافق	$٥ - ٣ت$
⑤ $٢ت$ أصلها $٠ + ٢ت$ ← المرافق	$-٢ت$
⑥ $-٤ت$ ← المرافق	$٤ت$
⑦ ٥ أصلها $٥ + صفرت$ ← المرافق	٥
⑧ ٧ ← المرافق	٧

ملحوظة

① مجموع العددين المترافقين (عدد حقيقى)
= ضعف الحد الأول (الحقيقى)

② حاصل ضرب العددين المترافقين (عدد حقيقى)
= مربع الحقيقى - مربع التخيلى
هنا ناقش $ت^٢ = -١$

مثال ٦

العدد $٥ - ٤ت$
اكتب مرافقه ثم أوجد
مجموع العدد ومرافقه وحاصل ضربهما

الحل

* العدد $٥ - ٤ت$ المرافق $= ٥ + ٤ت$
* $٥ - ٤ت + ٥ + ٤ت = ١٠$
* $(٥ - ٤ت)(٥ + ٤ت)$
$= ٢٥ - ١٦ت^٢ = ٢٥ - ١٦ \times (-١)$
$= ٢٥ + ١٦ = ٤١$

مثال ٧

العدد $٣ - ٢ت$
أوجد مرافقه
ثم أوجد مجموع وحاصل ضرب العدد ومرافقه

الحل

* العدد $٣ - ٢ت$ مرافقه $= ٣ + ٢ت$
* $(٣ - ٢ت) + (٣ + ٢ت) = ٦$
* $(٣ - ٢ت)(٣ + ٢ت) = ٩ - ٤ت^٢$
$= ٩ - (٤ \times -١) = ٩ + ٤ = ١٣$

ملحوظة

لكتابة العدد المركب فى أبسط صورة
إذا كان له مقام نضرب
البسط والمقام فى مرافق المقام .

مثال ٨

اكتب كلاً من الأعداد التالية في أبسط صورة.

(١) $\frac{١٠}{٢+ت}$

الحل

بالضرب × (٢ − ت) بسطاً ومقاماً

المقدار $= \frac{١٠}{٢+ت} \times \frac{(٢-ت)}{(٢-ت)} = \frac{١٠(٢-ت)}{٤-ت^٢}$

$= \frac{١٠(٢-ت)}{٤+١} = \frac{١٠(٢-ت)}{٥} = ٤-٢ت$

(٢) $\frac{٣+٢ت}{٢-٥ت}$

الحل

بالضرب × (٢ + ٥ت) بسطاً ومقاماً

$= \frac{٣+٢ت}{٢-٥ت} \times \frac{٢+٥ت}{٢+٥ت}$

$= \frac{٦+١٥ت+٤ت+١٠ت^٢}{٤-٢٥ت^٢}$

$= \frac{٦+١٩ت-١٠}{٤+٢٥} = \frac{-٤+١٩ت}{٢٩}$

$= \frac{-٤}{٢٩} + \frac{١٩}{٢٩}ت$

مثال ٩

إذا كان $\frac{(٢+ت)(٢-ت)}{٣+٤ت} = س + ت ص$ فأوجد قيمة س ، ص

$= \frac{٤-ت^٢}{٣+٤ت} = \frac{٤+١}{٣+٤ت} = \frac{٥}{٣+٤ت}$

بالضرب × (٣ − ٤ت) بسطاً ومقاماً

$= \frac{٥}{٣+٤ت} \times \frac{٣-٤ت}{٣-٤ت}$

$= \frac{٥(٣-٤ت)}{٩-١٦ت^٢} = \frac{٥(٣-٤ت)}{٩+١٦}$

$= \frac{٥(٣-٤ت)}{٢٥} = \frac{١}{٥}(٣-٤ت)$

$= (\frac{٣}{٥} - \frac{٤}{٥}ت)$

∴ س $= \frac{٣}{٥}$ ، ص $= \frac{-٤}{٥}$

مثال ١٠

إذا كان س $= \frac{١٣}{٥-ت}$ ، ص $= \frac{٣+٢ت}{ت+١}$ اثبت أن س ، ص مترافقان.

الحل

س $= \frac{١٣}{٥-ت} \times \frac{٥+ت}{٥+ت} = \frac{١٣(٥+ت)}{٢٥-ت^٢}$

$= \frac{١٣(٥+ت)}{٢٦} = \frac{٥+ت}{٢} = (\frac{٥}{٢}+\frac{ت}{٢})$

ص $= \frac{٣+٢ت}{ت+١} \times \frac{ت-١}{ت-١} = \frac{٣ت-٣+٢ت^٢-٢ت}{ت^٢-١}$

$= \frac{-٣+ت+٢}{١+١} = \frac{ت-٥}{٢}$ ... $(\frac{٥}{٢}-\frac{ت}{٢})$

∴ س ، ص عددان مترافقان

لاختلاف اشارة الجزء التخيلي فيهما

اختر الإجابة

(١) مرافق العدد (٣ت - ٤) هو ....

(أ) ٣ت + ٤ (ب) -٣ت - ٤

(ج) -٣ت + ٤ (د) ٣ت - ٤

تغيير اشارة التخيلي

(٢) المعكوس الجمعي للعدد المركب (٤ - ٧ت) هو ....

(أ) ٤ + ٧ت (ب) -٤ + ٧ت

(ج) -٤ - ٧ت (د) ٤ - ٧ت

هنغير الاشارتين

(٣) $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤}$ = ...

(أ) ت (ب) $ت^{٢}$

(ج) ١ (د) صفر

ت - ١ - ت + ١ = ٠

(٤) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، هـ أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية فإن

$ت^{أ} + ت^{ب} + ت^{جـ} + ت^{هـ}$ = ...

(أ) صفر (ب) -١

(ج) ١ (د) ت

(٥) $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + ... + ت^{١٠٠}$ = ...

(أ) ت (ب) -١

(ج) صفر (د) ١

كل ٤ أعداد متتالية = ٠

٠ × ٢٥ = صفر

(٦) إذا كان $(٣ + ٥ت)^{١٠٠} (٣ - ٥ت)^{١٠٠}$ = س + ص ت

فإن ص = ...

(أ) ٩ (ب) ٢٥

(ج) صفر (د) غير ذلك

الفكرة حاصل ضرب العددين المترافقين = عدد حقيقي

∴ الجزء التخيلي = صفر

(٧) إذا كان $(٥ + ت)^{١٠} (٥ - ت)^{١٠}$ = س + ت ص

فإن ص = ...

(أ) ١ (ب) -١

(ج) ٥ (د) صفر

(٨) أي مما يلي يكون عدداً تخيلياً ....

(أ) $\sqrt{-٣}$ (ب) π

(ج) -٤ (د) $ت^{٢}$

(٩) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة التربيعية

$س^{٢} + ١ = ٠$ فإن $ل^{٢٠١٨} + م^{٢٠١٨}$ = ...

(أ) -٢ت (ب) ٢ت

(ج) -٢ (د) ٢٠١٨

$س^{٢} = -١$ ، $س = \pm\sqrt{-١}$ ، س = ± ت

$(ت)^{٢٠١٨} + (-ت)^{٢٠١٨}$ = -١ - ١ = -٢

(١٠) أصغر عدد صحيح موجب (ن) يجعل $\left(\frac{١+ت}{١-ت}\right)^{ن} = ١$

(أ) ٢ (ب) ٤

(ج) ٨ (د) ١٢

الواجب

١ ضع فى أبسط صورة

١) ت^{8}
٢) ت$^{-12}$
٣) ت^{11}
٤) ت$^{-3}$
٥) ت^{25}
٦) ت$^{-9}$
٧) ت^{104}
٨) ت$^{-10}$
٩) ت$^{4ن+1}$
١٠) ت$^{8ن-1}$
١١) ت$^{4ن+2}$
١٢) ت$^{12ن-15}$
١٣) $\frac{1}{ت^{-2}}$
١٤) $\frac{1}{ت^{5}}$

٢ أوجد ناتج

١) (٤ + ت) + (٥ + ٣ت)
٢) (٢ − ت) + (٢ + ت)
٣) (٤ − ٣ت) − (٥ − ٢ت)
٤) (٢ + ٣ت)(٢ − ٣ت)
٥) (١ − ت)^{10}
٦) (٢ − ٤ت)(٣ + ت)

٣ ضع على الصورة أ + ب ت

١) $\frac{٤ + ت}{ت}$
٢) $\frac{٣ - ت}{٢ - ت}$
٣) $\frac{٤ - ٥ت}{٧ت}$
٤) $\frac{٣ + ٤ت}{٥ - ٢ت}$

٤ حل المعادلات التالية فى مجموعة الأعداد المركبة

١) س^{2} + ٩ = ٠
٢) س^{2} + ٢٥ = ٠
٣) ٤س^{2} + ١٠٠ = ٧٥
٤) س^{2} − ٤س + ٥ = ٠

٥ أوجد قيمتى س، ص التى تحقق أن

١) س + ٤ت = ٥ − ص ت
٢) (٢س + ١) + ٤ص ت = ٥ − ١٢ت
٣) (٢س − ص) + (س − ٢ص) ت = ٥ + ت
٤) $\frac{١٠}{٢ + ت}$ = س + ص ت
٥) $\frac{٦ - ٤ت}{١ - ت}$ = س + ت ص
٦) $\frac{(٣ - ت)(٣ + ت)}{٢ + ت}$ = س + ص ت

٦

إذا كان س = $\frac{١ - ٢ت}{١ - ٣ت}$ ، ص = $\frac{٢ - ت}{٣ - ت}$

فاثبت أن س، ص مترافقان

٨ اختر العدد ت ، −ت كل منهما

أ) معكوس جمعى
ب) معكوس ضربى
جـ) معكوس جمعى وضربى
د) غير ذلك

على فكرة كل منهما معكوس جمعى وضربى ومترافقان

الدرس الثالث تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية

فى المعادلة ٢ س^٢ + ب س + جـ = ٠

المميز	ب^٢-٤٢جـ > ٠ المميز موجب	ب^٢-٤٢جـ = ٠ المميز = صفر	ب^٢-٤٢جـ < ٠ المميز سالب
نوع الجذرين	حقيقيان مختلفان	حقيقيان متساويان	مركبان مترافقان وغير حقيقيين
الرســـم			

مثال : حدد نوع جذرى المعادلة دون حلها	تدريب : حدد نوع جذرى المعادلة دون حلها
(١) س^٢ – ١٠ س + ١٠ = ٠ الحــــل ٢ = ١ & ب = - ١٠ & جـ = ١٠ المميز ب^٢-٤٢جـ = (-١٠)^٢ – ٤ × ١ × ١٠ = ٦٠ (يعنى موجب) ∴ الجذران حقيقيان مختلفان .	(١) س^٢ – ٣ س + ٥ = ٠ الحــــل ٢= & ب = & جـ = المميز ب^٢-٤٢جـ =
(٢) س^٢ – ٦ س + ٩ = ٠ الحــــل ٢ = ١ & ب = - ٦ & جـ = ٩ المميز ب^٢-٤٢جـ = (-٦)^٢ – ٤ × ١ × ٩ = ٠ ∴ الجذران حقيقيان متساويان .	(١) س^٢ + ١٠ س + ٢٥ = ٠ الحــــل ٢= & ب = & جـ = المميز ب^٢-٤٢جـ =

③ $س^٢ - ٣ س + ٥ = ٠$

الحـــــل

$أ = ١$ & $ب = -٣$ & $جـ = ٥$

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ =$

$(-٣)^٢ - ٤ \times ١ \times ٥ = -١١$ (يعنى سالب)

∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين .

③ $س^٢ - ٣ س + ٤ = ٠$

الحـــــل

$أ =$ & $ب =$ & $جـ =$

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ =$

④ $(س - ١١) - س (س - ٦) = ٠$

الحـــــل

هنفك الاقواس ونعدلها الاول تمام ؟

$س - ١١ - س^٢ + ٦ س = ٠$

$- س^٢ + ٧ س - ١١ = ٠$ كدة جاهزة

$أ = -١$ & $ب = ٧$ & $جـ = -١١$

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ =$

$(٧)^٢ - ٤ \times (-١) \times (-١١) = ٥$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان .

④ $٦ س^٢ = ١٩ س - ١٥$

الحـــــل

هنعديهم فى طرف واحد ونخليها معادلة صفرية

$٦ س^٢ - ١٩ س + ١٥ = ٠$ كدة جاهزة

$أ =$ & $ب =$ & $جـ =$

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ =$

أثبت أن جذرى المعادلة

① **$٧ س^٢ - ١١ س + ٥ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ثم أوجد الجذرين بإستخدام القانون العام**

الحـــــل

$أ = ٧$ & $ب = -١١$ & $جـ = ٥$

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ =$

$(-١١)^٢ - ٤ \times ٧ \times ٥ = -١٩$ (كمية سالبة)

∴ الجذران مركبان وغير حقيقيين .

أثبت أن جذرى المعادلة

① **$٢ س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠$ مركبان وغير حقيقيين ثم أوجد الجذرين بإستخدام القانون العام**

الحـــــل

$أ =$ & $ب =$ & $جـ =$

المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ =$

لايجاد الجذرين باستخدام القانون العام

لايجاد الجذرين باستخدام القانون العام $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{١٤}$ $\frac{١١ \pm \sqrt{١٩} ت}{١٤}$ ∴ الجذران هما $\frac{١١ + \sqrt{١٩} ت}{١٤}$ ، $\frac{١١ - \sqrt{١٩} ت}{١٤}$	$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ} =$ ∴ الجذران هما ،

سؤال بسيط أمتى الجذران يكونوا متساويان ؟ طبعاً لما المميز = صفر مظبوط ؟ تعالوا نشوف الفكرة دى كمان

مثال : أوجد قيمة ك التى تجعل الجذران متساويان	تدريب: أوجد قيمة ك التى تجعل الجذران متساويان
① $٣ س^٢ - ٦ س + ك = ٠$ **الحـــــل** أ = ٣ & ب = -٦ & جـ = ك ∵ الجذران متساويان ∴ المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$ $(-٦)^٢ - ٤ × ٣ × ك = ٠$ $٣٦ - ١٢ ك = ٠$ $-١٢ ك = -٣٦ \Leftarrow ك = \frac{-٣٦}{-١٢} = ٣$	① $٢ س^٢ + ك س + ٥ = ٠$ **الحـــــل** أ = & ب = & جـ = المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$

مثال : أوجد قيمة ك التى تجعل الجذران متساويان :

$س^٢ + ٢ (ك - ١) س + (٢ ك + ١) = ٠$ **ثم أوجد الجذرين**

الحـــــل

أ = ١ & ب = ٢ (ك - ١) & جـ = (٢ ك + ١) ∵ الجذران متساويان

∴ المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$ $[٢ (ك - ١)]^٢ - [٤ × ١ × (٢ ك + ١)] = ٠$

[٢ك - ٢)]٢ – [٤ (٢ ك + ١)] = ٤ ك٢ – ٨ ك + ٤ – ٨ ك - ٤ = ٠

٤ ك٢ – ١٦ ك = ٠ ⇐ ٤ ك (ك - ٤) = ٠

إما ك = ٠ وتكون المعادلة	و إما ك = ٤ وتكون المعادلة
س٢ – ٢ س + ١ = ٠	س٢ + ٦ س + ٩ = ٠
(س – ١) (س – ١) = ٠	(س + ٣) (س + ٣) = ٠
الجذران هما ١ ، ١	الجذران هما - ٣ ، - ٣

(٣) مثال: أوجد قيمة ك التى تجعل جذرى المعادلة

س٢ + ٤ س + ك = ٠ حقيقيان مختلفان

الحـــــــل

م = ١ & ب = ٤ & جـ = ك

∵ الجذران حقيقيان مختلفان ∴ المميز > ٠

ب٢ - ٤م جـ > ٠ ⇐ (٤)٢ – ٤ × ١ × ك > ٠

١٦ – ٤ك > ٠ ⇐ – ٤ ك > - ١٦

ك < $\frac{-١٦}{-٤}$ ك < ٤ ∴ ك ∈] - ∞ ، ٤ [

(٣) تدريب: أوجد قيمة ك التى تجعل المعادلة

ك س٢ – ٨ س + ١٦ = ٠ ليس لها حل فى ح

يعنى الجذران مركبان وغير حقيقين

الحـــــــل

م = & ب = & جـ =

المميز ب٢ - ٤م جـ < ٠

ملحوظة هامة إذا كانت المعاملات م ، ب ، جـ أعداد نسبية والمميز مربع كامل فإن الجذران حقيقيان نسبيان

مثال : إذا كان ل ، م عددين نسبيين فاثبت أن جذرى المعادلة ل س٢ + (ل – م) س – م = ٠ عددان نسبيان

الحـــــــل

م = ل & ب = ل – م & جـ = –م

ب٢ - ٤م جـ = (ل – م)٢ – ٤ × ل ×(- م)

= ل٢ – ٢ل م + م٢ + ٤ل م = ل٢ + ٢ل م + م٢

(ل + م) ٢ ⇐ مربع كامل ∴ الجذران نسبيان

تدريب: إذا كان ل ، م عددين نسبيين فاثبت أن جذرى المعادلة ل س٢ + م س + م – ل = ٠ عددان نسبيان

الحـــــــل

مثال / اختر

(١) إذا كان $أس^{2} + ب س + جـ = ٠$

وكان المميز $ب^{2} - ٤ أ جـ > ٠$

فإن الجذران

(أ) حقيقيان مختلفان (ب) مركبان وغير حقيقيين

(جـ) حقيقيان متساويان (د) غير ذلك

---

(٢) إذا كان $ب^{2} - ٤ أ جـ = ٠$

فإن الجذران

(أ) حقيقيان متساويان (ب) حقيقيان مختلفان

(جـ) مركبان غير حقيقيين (د) غير ذلك

---

(٣) إذا كان $ب^{2} - ٤ أ جـ < ٠$

(أ) مركبان مترافقان (ب) حقيقيان متساويان

(جـ) حقيقيان مختلفان (د) غير ذلك

---

(٤) إذا كان المميز $ب^{2} - ٤ أ جـ$ غير سالب

فإن الجذران

(أ) حقيقيان متساويان (ب) حقيقيان مختلفان

(جـ) حقيقيان (د) مركبان وغير حقيقيين

غير سالب يعني موجب أو صفر

حقيقيان مختلفان أو متساويان

---

(٥) جذرى المعادلة $س^{2} - ٢\sqrt{٥} س + ١ = ٠$

(أ) حقيقيان نسبيان (ب) غير حقيقيين

(جـ) حقيقيان متساويان (د) حقيقيان غير نسبيين

بالآلة

الواجب

(١) حدد نوع جذرى كل من المعادلات التالية

1. $س^{2} + ٧س - ١٠ = ٠$
2. $س^{2} - ٦س + ٩ = ٠$
3. $س^{2} + ٣س + ٥ =$
4. $-س^{2} + ٥س - ٣٠ = ٠$
5. $٣س^{2} + ١٠س - ٤ = ٠$
6. $س^{2} - ١١س + ١٠ = ٠$
7. $٤ - ٢س = ٥س^{2}$
8. $س(س - ٢) = ٥$
9. $(س - ١١) - س(س - ٦) = ٠$

---

(٢) أوجد قيم ك التي تجعل للمعادلة

$٥س^{2} + ٤س + ك = ٠$

1. جذرين حقيقيين متساويين.
2. جذرين حقيقيين مختلفين
3. جذرين مركبين وغير حقيقيين

---

(٣) اثبت أن جذرى المعادلة

$٧س^{2} - ١١س + ٥ = ٠$ مركبان

وغير حقيقيين ثم باستخدام الحاسبة

الدرس الرابع
العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

أ س^2 + ب س + جـ = ٠

① مجموع الجذرين = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2} = \frac{-ب}{أ}$

② حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2} = \frac{جـ}{أ}$

الفكرة الاولى
مباشرة

مثال ١ دون حل المعادلات التالية أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين.

---

① س^2 + ٥ س + ٤ = ٠

الحل

أ = ١ ب = ٥ جـ = ٤

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{١} = -٥$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{١} = ٤$

② ٢ س^2 + ٥ س - ١٢ = ٠

الحل

أ = ٢ ب = ٥ جـ = -١٢

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{-٥}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{-١٢}{٢} = -٦$

---

③ ٣ س^2 = ٣٢ س - ٣٠

الحل

هنضبط المعادلة

٣ س^2 - ٣٢ س + ٣٠ = ٠

أ = ٣ ب = -٣٢ جـ = ٣٠

مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ} = \frac{٣٢}{٣}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٣٠}{٣} = ١٠$

الفكرة الثانية

مثال إذا كان مجموع جذري المعادلة ٢ س^2 + ب س - ٥ = ٠ هو $\frac{-٣}{٢}$ فأوجد قيمة ب ثم حل المعادلة في ح

الحل

أ = ٢ ب = ب جـ = -٥

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-٣}{٢} = \frac{-ب}{أ} = \frac{-ب}{٢}$

∴ -ب = -٣

∴ ب = ٣

∴ المعادلة هي ٢س^{٢} + ٣س − ٥ = ٠

أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = −٥

∴ باستخدام القانون العام $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$

$= \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ + ٤٠}}{٤} = \frac{-٣ \pm ٧}{٤}$

$\left\{ \frac{-٣ + ٧}{٤} ، \frac{-٣ - ٧}{٤} \right\} = \left\{ ١ ، \frac{-٥}{٢} \right\}$

كان من الممكن ان نحلها بالمقص
أو بالطريقة اللي بنتغلب بيها على المقص

هنشرحها الآن علشان تفهمها بس للخطوات

٢س^{٢} + ٣س − ٥ = ٠

س^{٢} + ٣س − ١٠ = ٠

$(\text{س} - \frac{٢}{٢})(\text{س} + \frac{٥}{٢}) = ٠$

س = ١ أو $\text{س} = \frac{-٥}{٢}$

مثال ٣ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة ٢س^{٢} − ٤س + ك = ٠ هو $\frac{٩}{٢}$ أوجد قيمة ك ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة

الحل

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{٩}{٢} = \frac{\text{ك}}{٢}$

∴ ك = ٩

∴ المعادلة هي ٢س^{٢} − ٤س + ٩ = ٠

أ = ٢ ، ب = −٤ ، جـ = ٩

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$

$= \frac{٤ \pm \sqrt{(-٤)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ٩}}{٢ \times ٢} = \frac{٤ \pm \sqrt{-٥٦}}{٤}$

$= \frac{٤ \pm \sqrt{٥٦}\,\text{ت}}{٤} = \left\{ ١ + \frac{\sqrt{١٤}}{٢}\text{ت} ، ١ - \frac{\sqrt{١٤}}{٢}\text{ت} \right\}$

مثال ٤ إذا كان س = −١ أحد جذري المعادلة س^{٢} − ٢س + أ = ٠ فأوجد قيمة أ والجذر الآخر.

الحل

بالتعويض عن س = −١

(−١)^{٢} − ٢(−١) + أ = ٠

١ + ٢ + أ = ٠ ∴ أ + ٣ = ٠

∴ أ = −٣

∴ المعادلة س^{٢} − ٢س − ٣ = ٠

(س + ١)(س − ٣) = ٠

س = −١ ، س = ٣

∴ الجذر الآخر = ٣

مثال ٥ إذا كان ٢ ، ٥ جذري المعادلة س^{٢} + أس + ب = ٠ فأوجد قيمة أ ، ب

الحل

مجموع الجذرين = ٧ ∴ $\frac{-\text{أ}}{١} = ٧$

∴ −أ = ٧ ∴ أ = −٧

∴ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ج}{أ}$ = ب = ١٠

∴ ب = ١٠

مثال ٦ إذا كان $\sqrt{3}$ ت ، $-\sqrt{3}$ ت جذري المعادلة $س^2 + أ س + ب = ٠$ فأوجد قيمتي أ ، ب

الحل

مجموع الجذرين = $\sqrt{3}$ ت + $(-\sqrt{3}$ ت$)$ = صفر

حاصل ضرب الجذرين = $\sqrt{3}$ ت × $-\sqrt{3}$ ت = $-٣ ت^2$

$= -٣ × (-١) = ٣$

∴ $\frac{-أ}{١}$ = صفر ∴ أ = صفر

$\frac{ب}{١} = ٣$ ∴ ب = ٣

الفكرة الثالثة

سؤال بسيط

* متى يكون مجموع عددين = صفر

جـ / إذا كان كل منهما معكوس جمعي للآخر.

في المعادلة معناها أن معامل س = صفر

* ومتى يكون حاصل ضرب عددين = ١

جـ / إذا كان كل منهما معكوس ضربي للآخر

في المعادلة معناها أن الحد المطلق = معامل $س^2$

جـ = أ

مثال ٧ أوجد قيمة ل إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر

أ) $س^2 + (ل - ٥) س + ٣ = ٠$

ل − ٥ = ٠ ∴ ل = ٥

ب) $س^2 + (٤ + ل) س - ٢ = ٠$

٤ + ل = ٠ ∴ ل = −٤

جـ) $س^2 + ل س - ١ = ٠$

ل = ٠

مثال ٨ أوجد قيمة ل التي تجعل أحد الجذرين معكوس ضربي للآخر.

أ) $٢ س^2 - ٥ س + ل = ٠$

ل = ٢

ب) $٤ ل س^2 + ٧ س + ل^2 + ٤ = ٠$

$ل^2 + ٤ = ٤ ل$

$ل^2 - ٤ ل + ٤ = ٠$ ⟸ $(ل - ٢)^2 = ٠$

∴ ل − ٢ = ٠ ∴ ل = ٢

جـ) $(ل - ٤) س^2 - ٥ س - ٣ = ٠$

ل − ٤ = −٣

ل = −٣ + ٤ = ١

∴ ل = ١

اختر

(١) إذا كان أحد جذري المعادلة $٢س^{٢} - ب س + ٧ = ٠$ معكوساً جمعياً للآخر فإن ب = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (ج) $\frac{٧}{٢}$ (د) صفر

(٢) إذا كان أحد جذري المعادلة $أ س^{٢} - ٣ س + ٢ = ٠$ معكوساً ضربياً للآخر فإن أ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) ٢ (د) ٣

(٣) إذا كان $س^{٢} + (ك - ٥) س - ٤ = ٠$ أحد جذريها معكوساً جمعياً للآخر فإن ك = ...

(أ) ١ (ب) -٥ (ج) ٥ (د) -٤

(٤) لإيجاد قيم ب، جـ الحقيقية في المعادلة $س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ يكون كافياً الحصول على ...

(أ) مجموع الجذرين = ٦ فقط (ب) أحد الجذرين (٣ + ت) فقط

(ج) (أ)، (ب) معاً (د) ولا حاجة من اللي فات

ليه ← إذا كان أحد الجذرين مركب فإن الآخر هو المرافق له وكده هنجيب مجموعهم وحاصل ضربهم وكل حاجة.

(٥) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة $د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ$ فإن $\frac{ب + جـ}{أ} = ...$

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٠

من الشكل الجذران هما ٥، ٢ مجموعهما ٧ وضربهما ١٠

$\frac{-ب}{أ} = ٧ \therefore \frac{ب}{أ} = -٧$ ، $\frac{جـ}{أ} = ١٠$

$\frac{ب + جـ}{أ} = \frac{ب}{أ} + \frac{جـ}{أ} = -٧ + ١٠ = ٣$ (أبو أدهم)

(٦) حاصل ضرب جذور المعادلات

$أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$ب س^{٢} + جـ س + أ = ٠$

$جـ س^{٢} + أ س + ب = ٠$ يساوي

(أ) أ ب جـ (ب) -١ (ج) ١ (د) صفر

$\frac{جـ}{أ} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{جـ} = ١$

(٧) في المعادلة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$ إذا كان مجموع جذريها = حاصل ضربهما فإن ب = ...

(أ) أ (ب) -أ (ج) جـ (د) -جـ

$\frac{-ب}{أ} = \frac{جـ}{أ} \therefore -ب = جـ$

$\therefore ب = -جـ$

إذا كان أحد جذري المعادلة هو عدد مركب فإن الجذر الآخر يكون مرافقه

مثال ٩: إذا كان (١ + √٢ ت) أحد جذري المعادلة س² - ٢س + جـ = ٠ فأوجد قيمة
١) الجذر الآخر
٢) قيمة جـ

الحل

١) ∵ الجذر الأول (١ + √٢ ت)
∴ الجذر الآخر = (١ - √٢ ت)

٢) ∵ حاصل ضرب الجذرين = جـ/١ = جـ
(١ + √٢ ت)(١ - √٢ ت)
= ١ - ٢ت² = ١ - ٢(-١) = ١ + ٢ = ٣
∴ جـ = ٣

بدون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب الجذرين.

١) س² - ٥س + ٧ = ٠

٢) ٢س² - ٣س + ١٤ = ٠

٣) ٥س² = ٢٠س - ٧

٤) (٣س - ٢)(س + ١) = ٠

٢) إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة ٣س² + ١٠س - جـ = ٠ هو $\frac{-8}{3}$ فأوجد قيمة جـ ثم حل في الأعداد المركبة.

٣) أوجد قيمة م إذا كان وأوجد الجذر الآخر

١) س = ٣ أحد جذري المعادلة س² - ٥س + م = ٠

٢) (١ + ت) أحد جذري المعادلة س² - ٢س + م = ٠

٤) أوجد قيمة ك إذا كان أحد الجذرين معكوس جمعي للآخر

١) س² - (ك - ٣)س + ٧ = ٠

٢) ٣س² + (ك - ١)س + ٤ = ٠

٥) أوجد قيمة ك إذا كان الجذران أحدهما مقلوب الآخر

١) ٣س² - ٥س + ك = ٠

٢) ٢س² - ٤س + (ك - ٣) = ٠

٣) (ك + ١)س² - ٣س + (٢ك - ٣) = ٠

الدرس الخامس
تكوين المعادلة إذا علم جذراها

إذا كان ل ، م هما جذر المعادلة

∴ مجموع الجذرين = ل + م

حاصل ضرب الجذرين = ل م

و المعادلة هي

س٢ - (مجموع الجذرين) س + حاصل ضرب الجذرين = ٠

الفكرة الأولى
مباشرة

مثال ١ كون المعادلات التي جذراها .

١ ٢ ، ٣

الحل

مجموع الجذرين = ٢ + ٣ = ٥

حاصل ضرب // = ٢ × ٣ = ٦

∴ المعادلة هي س٢ - ٥ س + ٦ = ٠

---

٢ ٢ ، -٥

الحل

مجموع الجذرين = ٢ + (-٥) = -٣

حاصل ضرب // = ٢ × -٥ = -١٠

∴ المعادلة س٢ + ٣ س - ١٠ = ٠

---

٣ ٥ + ٢ت ، ٥ - ٢ت

الحل

مجموع الجذرين = ٥ + ٢ت + ٥ - ٢ت = ١٠

حاصل ضرب الجذرين = (٥ + ٢ت) (٥ - ٢ت)

= ٢٥ - ٤ = ٢٣

∴ المعادلة هي س٢ - ١٠ س + ٢٣ = ٠

---

٤ ٣ + ت ، ٣ - ت

الحل

مجموع الجذرين = ٣ + ت + ٣ - ت = ٦

حاصل ضربهما = (٣ + ت)(٣ - ت) = ٩ - ت٢

= ٩ - (-١) = ٩ + ١ = ١٠

∴ المعادلة هي س٢ - ٦ س + ١٠ = ٠

الفكرة الثانية
تكوين معادلة من معادلة أخرى معلومة

الخطوات

١ من المعادلة المعلومة هنجيب ل + م ، ل م

٢ والجديدين نعوض بيهم في جذور المعادلة المطلوب

٣ وبعدكده نكون المعادلة بدلالة الجذور الجديدة

وانتوا عاملين أيه ؟

مثال ٢ إذا علمت أن ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} - ٥س - ٦ = ٠
فكون المعادلة التي جذراها ل+٢ ، م+٢

الحل

* في المعادلة المعلومة

ل+م = ٥ ، ل م = -٦

* في المعادلة المطلوبة

● مجموع الجذرين = ل+٢+م+٢ = ل+م+٤

= ٥+٤ = ٩

● حاصل ضرب الجذرين = (ل+٢)(م+٢)

= ل م + ٢ل + ٢م + ٤

= ل م + ٢(ل+م) + ٤

= -٦ + (٢×٥) + ٤ = ٨

* ∴ المعادلة المطلوبة هي

س^{٢} - ٩س + ٨ = ٠

مثال ٣ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} - ٥س + ٣ = ٠ فأوجد المعادلة التي جذورها ٢ل ، ٢م

الحل

* في المعادلة المعلومة

ل+م = ٥ ، ل م = ٣

* المعادلة المطلوبة

● مجموع الجذرين = ٢ل + ٢م = ٢(ل+م)

= ٢×٥ = ١٠

● وحاصل ضرب الجذرين = ٢ل×٢م = ٤ل م

= ٤×٣ = ١٢

* المعادلة هي س^{٢} - ١٠س + ١٢ = ٠

مثال ٤ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} - ٣س + ١ = ٠
فكون المعادلة التي جذراها ل+م ، ل م

الحل

* من المعادلة المعلومة

ل+م = ٣ ، ل م = ١

لاحظ جيداً

أن الجذور المطلوبة هي ل+م ، ل م

∴ جذور المعادلة المطلوبة = ٣ ، ١

● مجموع الجذرين = ٣+١ = ٤

● حاصل ضرب الجذرين = ٣×١ = ٣

∴ المعادلة هي س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠

مثال ٥ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س^{٢} - ٧س + ٤ = ٠
فكون المعادلة التي جذراها ل+١ ، م+١

الحل

حل انت يا شاطر

الفكرة الثالثة
مسائل اللف والدوران

احفظ شوية المتطابقات دى علشان هتحتاجهم كتير.

1. $ل^2+م^2=(ل+م)^2-2لم$
2. $ل^3+م^3=(ل+م)\left[(ل+م)^2-3لم\right]$
3. $ل^3-م^3=(ل-م)\left[(ل+م)^2-لم\right]$
4. $\frac{1}{ل}+\frac{1}{م}=\frac{م+ل}{لم}=\frac{ل+م}{لم}$
5. $\frac{ل}{م}+\frac{م}{ل}=\frac{ل^2+م^2}{لم}=\frac{(ل+م)^2-2لم}{لم}$

مثال ٦ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^2+3س-5=0$ فكون المعادلة التى جذراها $ل^2$ ، $م^2$

الحل

* من المعادلة المعلومة

$ل+م=-3$ ، $لم=-5$

* المعادلة المطلوب

● مجموع الجذرين $=ل^2+م^2=(ل+م)^2-2لم$

$=(-3)^2-2\times(-5)$

$=9+10=19$

● حاصل ضرب الجذرين $=ل^2م^2=(لم)^2$

$=(-5)^2=25$

* ∴ المعادلة هى $س^2-19س+25=0$

مثال ٧ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^2-5س+1=0$ فكون المعادلة التى جذراها $ل^2$ ، $م^2$

الحل

* من المعادلة المعلومة

$ل+م=5$ ، $لم=1$

* المعادلة المطلوب $ل^2$ ، $م^2$

● مجموع الجذرين $=ل^2+م^2=(ل+م)^2-2لم$

$=(5)^2-2\times1=25-2=23$

● حاصل ضرب الجذرين $=ل^2\times م^2=(لم)^2$

$=(1)^2=1$

∴ المعادلة هى $س^2-23س+1=0$

مثال ٨ كون المعادلة التربيعية التى كل من جذريها = مربع نظيره من جذرى المعادلة $س^2+3س+5=0$

الحل

المعلوم $ل+م=-3$ ، $لم=5$

المطلوب $ل^2$ ، $م^2$ [مربع نظيره]

مجموع الجذرين $=ل^2+م^2=(ل+م)^2-2لم=-1$

حاصل ضرب الجذرين $=ل^2م^2=(لم)^2=25$

∴ المعادلة هى $س^2+س+25=0$

ملاحظات لحل المسائل اللفظية

إذا كان الجذران ل ، م
تكون المعادلة التي جذراها

1. مربع نظيره: $ل^{٢}$ ، $م^{٢}$
2. مكعب نظيره: $ل^{٣}$ ، $م^{٣}$
3. ضعف نظيره: ٢ل ، ٢م
4. نصف نظيره: $\frac{ل}{٢}$ ، $\frac{م}{٢}$
5. يزيد عن نظيره بمقدار ١: ل+١ ، م+١
6. ينقص عن نظيره بمقدار ٢: ل-٢ ، م-٢
7. ثلاثة أمثال نظيره: ٣ل ، ٣م

مثال ٩: كون المعادلة التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذري المعادلة $س^{٢} - ٧س - ٩ = ٠$

الحل

نفرض أن جذري المعادلة المعلومة هما ل ، م

∴ ل + م = ٧ ، ل م = -٩

∴ جذور المعادلة المطلوبة هي ل+١ ، م+١

● مجموع الجذرين = ل + ١ + م + ١ = ل + م + ٢
= (ل+م) + ٢ = ٧ + ٢ = ٩

● حاصل ضرب الجذرين = (ل+١) × (م+١)
= ل م + ل + م + ١
= (ل م) + (ل+م) + ١
= -٩ + ٧ + ١ = -٩ + ٨ = -١

∴ المعادلة هي $س^{٢} - ٩س - ١ = ٠$

مثال ١٠: إذا كان ل ، م جذرا المعادلة $س^{٢} - ٣س + ٢ = ٠$ كون المعادلة التي جذراها $ل^{٣}$ ، $م^{٣}$

الحل

* من المعادلة المعطاة
ل + م = ٣ ، ل م = ٢

* المعادلة المراد تكوينها $ل^{٣}$ ، $م^{٣}$

● مجموع الجذرين = $ل^{٣} + م^{٣}$
= $(ل+م)[(ل+م)^{٢} - (٣ل م)]$
= ٣ [٩ - ٣×٢] = ٣ [٩ - ٦]
= ٣ × ٣ = ٩

● حاصل ضرب الجذرين = $ل^{٣} م^{٣} = (ل م)^{٣}$
= $(٢)^{٣} = ٨$

* ∴ المعادلة هي $س^{٢} - ٩س + ٨ = ٠$

مثال ١١: إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $٢س^{٢} - ٣س - ١ = ٠$
كون المعادلة التي جذراها

1. $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$
2. $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$
3. ل + م ، ل م

جذور المعادلة المعطاة ل ، م

ل + م = $\frac{٣}{٢}$ ، ل م = $\frac{-١}{٢}$

(١) $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

مجموع الجذرين = $\frac{ل+م}{ل م}$ = $\frac{٣}{٢} \div \frac{-١}{٢}$

= $\frac{٣}{٢} \times \frac{-٢}{١}$ = -٣

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{١}{ل} \times \frac{١}{م}$ = $\frac{١}{ل م}$

= ١ ÷ $(\frac{-١}{٢})$ = -٢

∴ المعادلة هى س^٢ + ٣ س - ٢ = ٠

(٢) $\frac{ل}{م}$ ، $\frac{م}{ل}$

مجموع الجذرين = $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل}$ = $\frac{ل^٢+م^٢}{ل م}$

= $\frac{(ل+م)^٢ - ٢ل م}{ل م}$ = $\frac{(\frac{٣}{٢})^٢ - ٢\times(\frac{-١}{٢})}{(\frac{-١}{٢})}$

= $\frac{-١٣}{٢}$

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{ل}{م} \times \frac{م}{ل}$ = ١

∴ المعادلة هى س^٢ + $\frac{١٣}{٢}$ س + ١ = ٠

بالضرب × ٢

٢ س^٢ + ١٣ س + ٢ = ٠

(٣) (ل + م) ، (ل م)

يعنى $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-١}{٢}$

مجموع الجذرين = $\frac{٣}{٢}$ + $(\frac{-١}{٢})$ = ١

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{٣}{٢} \times \frac{-١}{٢}$ = $\frac{-٣}{٤}$

∴ المعادلة س^٢ - س - $\frac{٣}{٤}$ = ٠ ×٤

٤ س^٢ - ٤ س - ٣ = ٠

مثال (١٢) إذا كان ل+١ ، م+١ هما جذرا المعادلة س^٢ + ٥ س + ٢ = ٠ فكون المعادلة التى جذراها ل ، م

الحل

المعادلة المعطاة (ل+١) ، (م+١)

مجموع الجذرين = ل+١+م+١ = ل+م+٢

∴ ل+م+٢ = -٥ ∴ ل+م = -٧

حاصل ضربهما = (ل+١) (م+١)

= ل م + ل + م + ١ = ل م - ٧ + ١ = ٢

ل م - ٦ = ٢ ل م = ٨

المعادلة المطلوب جذراها ل ، م

مجموعهما ل+م = -٧

وحاصل ضربهما = ل م = ٨

∴ المعادلة هى س^٢ + ٧ س + ٨ = ٠

ان لم تتألم لن تتعلم

اختر

(١) المعادلة التربيعية التي مجموع جذريها -١ وحاصل ضربهما -٣ هي ....

(أ) $س^٢ - س - ٣ = ٠$ (ب) $س^٢ + س + ٣ = ٠$

(ج) $س^٢ - س + ٣ = ٠$ (د) $س^٢ + س - ٣ = ٠$

---

(٢) المعادلة التربيعية التي جذراها ٣ ، -٥ هي ...

(أ) $س^٢ + ٢س - ١٥ = ٠$ (ب) $س^٢ - ٢س - ١٥ = ٠$

(ج) $س^٢ - ٢س + ١٥ = ٠$ (د) $س^٢ + ٢س + ١٥ = ٠$

---

(٣) إذا كان ل ، $ل^٢$ هما جذرا المعادلة $٢س^٢ + ب س + ٥٤ = ٠$ فإن ب = ...

(أ) -١٢ (ب) -٢٤ (ج) ٢٧ (د) ٣٦

حاصل ضربهما $ل^٣ = \frac{٥٤}{٢} = ٢٧$ ل = ٣

مجموعهما $٣ + ٩ = ١٢$ $-\frac{ب}{٢} = ١٢$ ∴ $ب = -٢٤$

---

(٤) إذا كان م ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة $م س^٢ + ب س + ١٢ = ٠$ فإن م = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٩

حاصل ضربهما $م \times \frac{٢}{م} = ٢$ $\frac{١٢}{م} = ٢$ م = ٦

---

(٥) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢ - ٥س + ٦ = ٠$ فإن $ل^٢ - ٥ل = ...$

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٦ (د) -٦

∵ ل جذر للمعادلة ∴ بوضع ل بدلاً من س

$ل^٢ - ٥ل + ٦ = ٠$ ∴ $ل^٢ - ٥ل = -٦$

---

(٦) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢ - ٩س + ١ = ٠$ فإن $ل^٢ - ٩ل + ٥ = ...$

(أ) ٤ (ب) ١ (ج) -١ (د) ٩

بوضع ل بدلاً من س ∴ $ل^٢ - ٩ل + ١ = ٠$

∴ $ل^٢ - ٩ل = -١$ المقدار المطلوب $ل^٢ - ٩ل + ٥$

$= -١ + ٥ = ٤$

---

(٧) إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة $س^٢ - (ظا θ) س - ١ = ٠$ وكان $ل^٢ + م^٢ = ٣$ حيث $٠ < θ < ٩٠°$ فإن θ = ...

(أ) $\frac{π}{١٢}$ (ب) $\frac{π}{٦}$ (ج) $\frac{π}{٤}$ (د) $\frac{π}{٣}$

$(ل+م)^٢ - ٢لم = ٣$ $(ل+م)^٢ + ٢ = ٣$

$(ل+م)^٢ = ١$ $ل + م = ±١$ السالب مرفوض لأن θ حادة

$ظا θ = ١$ ∴ $θ = ٤٥°$

---

(٨) لتكوين المعادلة التربيعية التي جذراها ٤ل ، ٤م حيث ل ، م أعداد حقيقية يكون كافياً الحصول على

(أ) $ل + م = θ$ فقط

(ب) $(ل+م+٤)^٢ + (لم-٣)^٢ = ٠$ فقط

(ج) م ، ب معاً

(د) ولا حاجه خالص

ألغاز رياضية

حرك عود ثقاب واحد لتصبح المعادلة صحيحة

كون المعادلة التي جذراها

1. ١ ، ٣
2. -٥ ، ٤
3. ٢ ، -٧
4. $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$
5. ١-٣ت ، ١+٣ت
6. ١+√٢ ، ١-√٢
7. -٥ت ، ٥ت

٢ إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة س٢ - ٧س + ١٢ = ٠ فكون المعادلة التي جذراها

1. ل+١ ، م+١
2. ل-٢ ، م-٢
3. ٢ل ، ٢م
4. ل٢ ، م٢
5. ل٣ ، م٣
6. $\frac{١}{ل}$ ، $\frac{١}{م}$

٣ من المعادلة س٢ - ٧س - ٩ = ٠ كون المعادلة التي جذراها .

1. ضعف نظيرها من المعادلة المعطاة
2. يزيد عن نظيره بمقدار ١
3. ينقص عن نظيره بمقدار ٣
4. مربع نظيره
5. مكعب نظيره
6. المعكوس الجمعي لنظيره
7. المعكوس الضربي لنظيره

٤ إذا كان ل ، م جذري المعادلة س٢ - ٧س + ٣ = ٠ فأوجد المعادلة التي جذراها

1. ٢ل ، ٢م
2. ل+٢ ، م+٢
3. $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$
4. ل+م ، ل م
5. ل٢ ، م٢

موظف مصري بيسال موظف امريكي
انت مرتبك كام
قاله ٧٠٠ دولار اساسي و٨٠٠ بدل سفر
و٤٠٠ دولا بدل خطر و٦٠٠ بدل غربة
فسأله الامريكي وانت
قاله ٦٠٠ جنيه
قاله الامريكاني دول بدل ايه
قاله : بدل ما اشحت

الدرس السادس
بحث إشارة الدالة

أولاً الدالة الثابتة

د: د(س) = ح ، ح ∈ ح* هي نفس إشارة ح

يعني إذا كان الثابت موجب تكون موجبة.

وإذا كان سالب تكون سالبة.

مثال ١ عين إشارة الدوال الثابتة

١) د(س) = ٥ ← موجبة دائماً

٢) د(س) = -٢ ← سالبة دائماً

٣) د(س) = $\frac{١}{٤}$ ← موجبة دائماً

٤) د(س) = $-\sqrt{٣}$ ← سالبة دائماً

ثانياً الدالة الخطية

هنحل المعادلة ونحدد قيمة س
وعلى اليمين مثل والشمال عكس

مثال ٢ عين إشارة كلاً مما يلي

١) د(س) = ٣س + ٦

الحل

بوضع ٣س + ٦ = ٠   ٣س = -٦

س = $\frac{-٦}{٣}$ = -٢

∞- ←———— (-٢) ———— ∞ س

- - - صفر + + + + + إشارة د(س)

عكس إشارة س ، مثل إشارة س

الدالة تكون

* موجبة عندما س > -٢ أو]-٢، ∞[
* سالبة عندما س < -٢ أو]-∞، -٢[
* د(س) = صفر عندما س = -٢

٢) د(س) = -٢س + ٨

الحل

بوضع -٢س + ٨ = ٠   -٢س = -٨

س = $\frac{-٨}{-٢}$ = ٤

∞- ←———— (٤) ———— ∞ س

عكس ، مثل

+ + + صفر - - - - إشارة د(س)

الدالة موجبة س < ٤ أو]-∞، ٤[

سالبة س > ٤ أو]٤، ∞[

د(س) = صفر عندما س = ٤

③ $د(س) = ٢س - ٣$

الحل

بوضع $٢س - ٣ = ٠$ ، $٢س = ٣$

∴ $س = \frac{٣}{٢}$

س: ∞ ... مثل ... $\frac{٣}{٢}$ ... عكس ... -∞

اشارة د(س): + + + + + + + ... صفر ... - - - -

موجبة عندما $س ∈]\frac{٣}{٢} ، ∞[$

سالبة عندما $س ∈]-∞ ، \frac{٣}{٢}[$

صفر عندما $س ∈ \{\frac{٣}{٢}\}$

ثالثاً الدالة التربيعية

هنشوف المميز

الحالة الأولى المميز سالب

$ب^٢ - ٤أجـ < ٠$

موجب دائماً سالب دائماً

حسب اشارة معامل $س^٢$

مثال ٣ عين اشارة كلاً من الدوال التالية

① $د(س) = س^٢ + ٢س + ٥$

الحل

$أ = ١$ ، $ب = ٢$ ، $جـ = ٥$

$ب^٢ - ٤أجـ = (٢)^٢ - ٤(١ × ٥) = ٤ - ٢٠$

$= -١٦$ المميز سالب

∴ إشارة الدالة موجبة [مثل $س^٢$]

لجميع قيم $س ∈ ح$

② $د(س) = -س^٢ + ٢س - ٦$

الحل

$أ = -١$ ، $ب = ٢$ ، $جـ = -٦$

$ب^٢ - ٤أجـ = (٢)^٢ - ٤ × (-١)(-٦)$

$= ٤ - ٢٤ = -٢٠$ "سالب"

∴ اشارة د(س) سالبة لجميع قيم

$س ∈ ح$

معلش هى أول 80 سنة من
حياة الإنسان بتبقى صعبة شوية
بس بعدها بيرتاح خالص

الحالة الثانية: المميز = صفر

موجبة $س \in ح - \{٢\}$

سالب $س \in ح - \{-١\}$

مثال ٤: ابحث اشارة كلاً من الدوال التالية

(١) $د(س) = س^٢ - ٦س + ٩$

الحل

$أ = ١ \quad ب = -٦ \quad جـ = ٩$

$ب^٢ - ٤أجـ = (-٦)^٢ - ٤ \times ١ \times ٩$

$= ٣٦ - ٣٦ = صفر$

$\therefore$

بحل المعادلة $س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٣) = ٠$

$\therefore س = ٣$

(خط الأعداد: $-\infty$ ... مثل ... ٣ ... مثل ... ∞ — اشارة د(س): $+ + + + +$ ٠ $+ + + + +$)

الدالة موجبة فى $ح - \{٣\}$

$د(س) = صفر$ عندما $س \in \{٣\}$

---

(٢) $د(س) = -س^٢ + ٤س - ٤$

الحل

$أ = -١ \quad ب = ٤ \quad جـ = -٤$

$ب^٢ - ٤أجـ = (٤)^٢ - ٤(-١)(-٤)$

$= ١٦ - ١٦ = صفر$

بحل المعادلة $-س^٢ + ٤س - ٤ = ٠$

$س^٢ - ٤س + ٤ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٢) = ٠$

$\therefore س = ٢$

(خط الأعداد: $-\infty$ ... مثل ... ٢ ... مثل ... ∞ — $- - - -$ صفر $- - - - - -$)

الدالة سالبة عندما $س \in ح - \{٢\}$

$د(س) = صفر$ عندما $س = ٢$

---

(٣) $د(س) = (٢س - ٣)^٢$

الحل

بوضع $(٢س - ٣)^٢ = ٠$

$\therefore ٢س - ٣ = ٠ \quad ٢س = ٣$

$\therefore س = \frac{٣}{٢}$

والجذران حقيقيان ومتساويان

(خط الأعداد: $-\infty$ ... $\frac{٣}{٢}$ ... ∞ — $+ + +$ صفر $+ + +$)

$د(س)$ موجبة عندما $س \in ح - \{\frac{٣}{٢}\}$

$د(س) = صفر$ عندما $س = \frac{٣}{٢}$

الحالة الثالثة المميز موجب

معامل س² موجب

معامل س² سالب

٣- ، ٣ ، ٢- ، ٢

مثل ∞- | مثل | عكس | مثل ∞

++ ٠ --- ٠ ++

-- ٠ +++ ٠ --

مثال ٥ ابحث إشارة الدوال التالية .

(١) د(س) = س² − ٥س + ٦

الحل

أ = ١ ب = −٥ جـ = ٦

ع = ب² − ٤أجـ = (−٥)² − ٤ × ١ × ٦ = ١ موجب

✳ بوضع س² − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٢)(س − ٣) = ٠

س = ٢ س = ٣

∞- مثل | ٢ | عكس | ٣ | مثل ∞

+++ صفر −−− صفر +++

موجبة]−∞ ، ٢[∪]٣ ، ∞[

أو ح − [٢ ، ٣]

سالبة عندما س ∈]٢ ، ٣[

د(س) = صفر عندما س ∈ {٢ ، ٣}

(٢) د(س) = −س² + ٤س − ٣

الحل

أ = −١ ب = ٤ جـ = −٣

ع = ب² − ٤أجـ = (٤)² − [٤ × −١ × −٣] = ٤ موجب

✳ بوضع −س² + ٤س − ٣ = ٠

س² − ٤س + ٣ = ٠

(س − ١)(س − ٣) = ٠

س = ١ س = ٣

∞- مثل | ١ | عكس | ٣ | مثل ∞

−− صفر +++ صفر −−

موجبة س ∈]١ ، ٣[

سالبة س ∈]−∞ ، ١[∪]٣ ، ∞[

أو ح − [١ ، ٣]

د(س) = صفر عندما س ∈ {١ ، ٣}

(٣) د(س) = (س − ٢)(س + ٣)

الحل

بوضع (س − ٢)(س + ٣) = ٠

س = ٢ أو س = −٣

∞- مثل | −٣ | عكس | ٢ | مثل ∞

++ صفر −−− صفر ++

موجبة]−∞ ، −٣[∪]٢ ، ∞[

أو ح − [−٣ ، ٢]

سالبة في]−٣ ، ٢[

د(س) = صفر عندما س = {−٣ ، ٢}

اختر

تذكر أن ح = $]-\infty, \infty[$

١ د(س) = −٤ تكون سالبة فى الفترة ...

(أ) $]-\infty, 4]$ (ب) $]-4, 4[$
(ج) $]-\infty, \infty[$ (د) $]-2, 2[$

٢ إذا كانت د(س) = ٣س فإن اشارة د تكون سالبة فى ...

(أ) $]-\infty, 3[$ (ب) $]3, \infty[$
(ج) $]-3, \infty[$ (د) $]-\infty, 0[$

٣ د(س) = س² − ٩ تكون سالبة ∀ س ∈ ....

(أ) ح − $[-3, 3]$ (ب) $]-3, 3[$
(ج) $]-\infty, 0[$ (د) $]-3, \infty[$

٤ د(س) = س² + ١ تكون موجبة فى الفترة ....

(أ) $]0, \infty[$ (ب) $]1, \infty[$
(ج) $]-\infty, 1[$ (د) ح

٥ د(س) = أس² + ب س + جـ يكون لها اشارة واحدة فى ح عندما

(أ) ب² − ٤ أ جـ > ٠ (ب) ب² − ٤ أ جـ < ٠
(ج) ب² − ٤ أ جـ = ٠ (د) ب² − ٤ أ جـ ≥ ٠

٦ لبحث اشارة د يكون كافياً معرفة أن ....

(أ) منحنى الدالة د يوازى محور السينات .
(ب) " " د يقع بأكمله فوق محور السينات .
(ج) (أ) ، (ب) معاً
(د) ولا حاجة من اللى فات

٧ إذا كان د(س) = أس + ب وكان س = ل جذر للمعادلة د(س) = ٠ فإن د(ل+١) × د(ل−١) ∈ ....

(أ) ح⁺ (ب) ح⁻
(ج) $[-1, 1]$ (د) $[-5, 5]$

د(ل) = ٠ ، د(ل+١) > ٠ ، د(ل−١) < ٠
∴ حاصل ضربهما < ٠ ∈ ح⁻

٨ أى الدوال الآتية موجبة لجميع قيم س ∈ ح

(أ) د(س) = س² + ٤ (ب) د(س) = ٣
(ج) د(س) = (س−١)² + ٩ (د) كل ما سبق

مثال

اكتب قاعدة كل من الدوال التالية

٣ ٢ ١ ، ١ ٣ ٥ ، −٤

د(س) = أ(س−١)(س−٥)
منحنى الدالة يمر بالنقطة (٣، −٤)
أ(٣−١)(٣−٥) = −٤
أ × ٢ × −٢ = −٤
∴ −٤أ = −٤ ∴ أ = ١ ∴ د(س) = (س−١)(س−٥)
∴ د(س) = س² − ٦س + ٥

مره واحد رجع من الشغل لقي بيته بيتحرق
راح دخل وجاب بنته وطلع
ورجع مره تانيه وجاب ابنه
ورجع تالت مره وجاب مراته
ورجع رابع مره وجه فاضي
ورجع خامس مره وجه فاضي

فالناس قالوله ليه بتروح وترجع فاضي
قالهم بروح اقلب حماتي

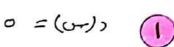
نكت ساخره 2018

١ ابحث اشارة كلاً من الدوال التالية

١) د(س) = ٥
٢) د(س) = -٩
٣) د(س) = س - ١
٤) د(س) = -٢س + ٤
٥) د(س) = -٣س - ٦
٦) د(س) = ٤س - ٥
٧) د(س) = ٢ - س

٢ ابحث اشارة كلاً من الدوال التالية

١) د(س) = س² + ٣س + ٣
٢) د(س) = -س² + ٥س - ٧
٣) د(س) = س² - ٨س + ١٦
٤) د(س) = -س² + ١٠س - ٢٥
٥) د(س) = (س - ٣)²
٦) د(س) = س² - ٧س + ١٢
٧) د(س) = س² - ٢س - ١٥
٨) د(س) = (س - ٣)(٥ - س)

٣ أكمل

١) د(س) = ٢ إشارتها ---- في ----
٢) د(س) = -٣س تكون سالبة عندما ----
٣) د(س) = س - ٢ موجبة في الفترة ----
٤) د(س) = ٧ - س سالبة في الفترة ----
٥) د(س) = س² تكون سالبة عندما س ∈ ----
٦) د(س) = س² - ٦س + ٩ موجبة في الفترة ----
٧) د(س) = -(س - ١)(س + ٢) موجبة في الفترة ----

الفيزياء كادت ان تكون اسهل

لو ان الشجرة هي التي
سقطت على نيوتن
وليس التفاحة

واحد بخيل بياكل فستق
مراته قالتله .. أكلني معاك .. اداها واحده
بعد شوية قالتله .. هات واحده كمان

قالها : والله العظيم كله نفس الطعم

الدرس السابع
متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد

خطوات الحل

١. نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة
٢. ندرس إشارة الدالة التي كتبناها ← الدرس الماضي
٣. نحدد الفترات التي تحقق المتباينة ← بعد ما نعملها متباينة صفرية

مثال ١ أوجد في ح مجموعة حل المتباينة

$$س^٢ - ٥س + ٦ < ٠$$

الحل

د(س) = س² − ٥س + ٦

المميز: أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٦

ب² − ٤أجـ = (−٥)² − (٤×١×٦) = ١ موجب

∴ جذران حقيقيان مختلفان

(س − ٢)(س − ٣) = ٠

س = ٢ أو س = ٣

−∞ ← (٢) ── (٣) → ∞

+++ صفر − − − − صفر +++

المطلوب بجهة على المتباينة هنلاقيها أصغر من صفر يعني هناخد الجزء السالب

∴ م.ح =]٢ ، ٣[

مثال ٢

$$-س^٢ + س - ١ > ٠$$

الحل

الدالة التربيعية د(س) = −س² + س − ١

أ = −١ ب = ١ جـ = −١

المميز ب² − ٤أجـ = ١ − (٤×−١×−١)
= −٣ (سالب)

ليس لها جذور حقيقية ∴ الإشارة مثل إشارة معامل س² سالبة دائماً

∴ م.ح = ∅

مثال ٣

$$س^٢ - ٦س + ٩ \le ٠$$

الحل

الدالة التربيعية د(س) = س² − ٦س + ٩

أ = ١ ب = −٦ جـ = ٩

ب² − ٤أجـ = (−٦)² − (٤×١×٩) = صفر

جذران حقيقيان متساويان

س² − ٦س + ٩ = ٠

(س − ٣)(س − ٣) = ٠

∴ س = ٣

مثل (٣) مثل

++++ صفر ++ ++

عايزين الأصغر أو يساوي صفر ومفيش أصغر لكن قيمة = صفر

∴ م.ح = {٣}

٤ $س^٢ \geqslant ٤س - ٤$

الحل

هنعدلها

$س^٢ - ٤س + ٤ \geqslant ٠$

الدالة التربيعية

$د(س) = س^٢ - ٤س + ٤$

$أ = ١$ $ب = -٤$ $جـ = ٤$

المميز $ب^٢ - ٤أجـ = (-٤)^٢ - (٤ × ١ × ٤) = ٠$

بوضع $س^٢ - ٤س + ٤ = ٠$

$(س - ٢)(س - ٢) = ٠$

$\therefore$ $س = ٢$

(خط الأعداد: −∞ ... ٢ ... ∞ ؛ الإشارة: ++++ صفر ++++)

عايزينه $\geqslant$ يعنى الموجب والصفر

$\therefore$ م.ح = ح

٥ $٥ - ٢س \leqslant س^٢$

الحل

مش انت عارف إن أ $\leqslant$ ب

$\therefore$ ب $\geqslant$ أ صح ؟

$\therefore$ $س^٢ \geqslant ٥ - ٢س$ كدة تمام ؟

$س^٢ + ٢س - ٥ \geqslant ٠$

الدالة التربيعية $د(س) = س^٢ + ٢س - ٥$

$أ = ١$ $ب = ٢$ $جـ = -٥$

المميز $ب^٢ - ٤أجـ = (٢)^٢ - (٤ × ١ × -٥)$

$= ٢٤$ موجب

جذران حقيقيان مختلفان

الحل بالقانون العام $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$

$= \frac{-٢ \pm \sqrt{٢٤}}{٢ × ١} = \{-١ + \sqrt{٦} ، -١ - \sqrt{٦}\}$

$= \{١,٤٥ ، -٣,٤٥\}$

(خط الأعداد: −٣,٤٥ ، ١,٤٥ ؛ الإشارة: ++ صفر -- صفر ++)

$\therefore$ م.ح = ح −]−٣,٤٥ ، ١,٤٥[

اختبر

١) مجموعة حل المتباينة $(س - ٢)(س - ٥) < ٠$ فى ح هى .....

(أ) $\{٢ ، ٥\}$ (ب) $]٢ ، ٥[$

(جـ) $[٢ ، ٥]$ (د) ح − $[٢ ، ٥]$

٢) مجموعة حل المتباينة $س(س - ١) > ٠$ فى ح .....

(أ) $\{٠ ، ١\}$ (ب) $[٠ ، ١]$

(جـ) ح − $[٠ ، ١]$ (د) $]٠ ، ١[$

٣) مجموعة حل المتباينة $-س(س + ٢) \geqslant ٠$ فى ح هى .....

(أ) $\{٠ ، -٢\}$ (ب) $[-٢ ، ٠]$

(جـ) $]-٢ ، ٠[$ (د) $[-٢ ، ٢]$

الواجب

١ أوجد في ح مجموعة حل المتباينات التالية

1. $س^٢ + ٢س - ٨ > ٠$
2. $س^٢ - ١ \leq ٠$
3. $٢س - س^٢ < ٠$
4. $س^٢ \geq ٩$
5. $س^٢ \geq ٦س - ٩$
6. $(س - ٢)^٢ \leq -٥$
7. $(س - ٢)(س - ٥) < ٠$
8. $س(س - ١) \geq ٠$
9. $س^٢ + ٩ > ٠$

٤ مجموعة حل المتباينة $س^٢ + ٩ > ٠$ في ح هي ...

(أ) ∅ (ب) ح
(جـ)]-٣، ٣[(د) ح - [-٣، ٣]

٥ مجموعة حل المتباينة $س^٢ + ١ \leq ٠$ في ح ....

(أ) ∅ (ب) ح
(جـ) [-١، ١] (د) ح -]-١، ١[

٦ في الشكل المقابل يمثل د(س)

فإن مجموعة حل المتباينة د(س) ≥ ٠ هي ...

(أ)]-١، ٣[(ب)]-∞، ٢[
(جـ)]٣، ∞[(د)]-∞، -١] ∪ [٣، ∞[

٧ مجموع الأعداد الصحيحة التي تنتمي لمجموعة حل المتباينة $(س - ٢)(٣س - ١) \leq ٠$

(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

$[\frac{١}{٣}، ٢]$ ١ + ٢ = ٣

٨ إذا كان مميز المعادلة $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ سالب فإن مجموعة حل المتباينة $أس^٢ + ب س + جـ > ٠$ حيث أ > ٠ هي ...

(أ) ح (ب) ∅ (جـ) ح$^+$ (د) ح$^-$

المنحنى بالكامل أسفل محور السينات

الأدهم
فى
حساب المثلثات
الصف الأول الثانوى
عام وأزهر
٢٠٢٠
هدية
مجانية
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الادهم فى الرياضيات
١ث مثلثات ترم ١
٤١
الدرس الأول
الزاوية الموجهة
تعريف الزاوية الموجهة :
هي زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية ولهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية
قياس موجب
قياس سالب
(أ و ب)
ضلع نهائي
موجب
ضلع ابتدائي
عكس حركة عقارب الساعة
(ب و أ)
ضلع ابتدائي
سالب
ضلع نهائي
في اتجاه حركة عقارب الساعة
الوضع القياسي للزاوية الموجهة
١ رأسها نقطة الأصل.
٢ ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات
زوايا في الوضع القياسي
زوايا ليست في الوضع القياسي
رأسها لا تقع على نقطة الأصل
الضلع الابتدائي لا يقع على الجزء الموجب لمحور السينات
الزوايا المتكافئة
يقال لعدة زوايا موجهة في الوضع القياسي أنها متكافئة إذا كان لها جميعاً نفس الضلع النهائي
أ/ محمد أدهم
٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

لإيجاد زاوية مكافئة

١) إذا كانت الزاوية سالبة هنزود 360° حتى تصبح موجبة

٢) إذا كانت الزاوية موجبة هنطرح 360° حتى تصبح سالبة

مثال ١ عين أصغر قياس موجب

١) $-120 \Leftarrow -120 + 360 = 240^\circ$

٢) $-450 \Leftarrow -120 + 360 = -90$
$-90 + 360 = 270^\circ$

٣) $-1000 \Leftarrow + 360 = -640 + 360$
$= -280 + 360 = 80^\circ$

مثال ٢ عين قياس سالب لكل من

١) $200 \Leftarrow 200 - 360 = -160^\circ$

٢) $620 \Leftarrow 620 - 360 = 260 - 360$
$= -100^\circ$

مثال ٣ أوجد زاويتين إحداهما قياس موجب والأخرى سالب مكافئين للزوايا التالية .

١) 40°

الموجب: $40 + 360 = 400^\circ$

السالب: $40 - 360 = -320^\circ$

٢) -125°

الموجب: $-125 + 360 = 235^\circ$

السالب: $-125 - 360 = -485^\circ$

٣) 270°

الموجب: $270 + 360 = 630^\circ$

السالب: $270 - 360 = -90^\circ$

تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية

ملحوظة هامة

إذا وقع الضلع النهائي على أحد محاور الاحداثيات تسمى الزاوية
بـ الزاوية الربعية

مثل ٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°

مثال ٤: عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى :

١) ١٢٠°
٩٠° > ١٢٠° > ١٨٠° الربع الثانى

٢) ٣٠٠°
٢٧٠° > ٣٠٠ > ٣٦٠° الربع الرابع

٣) - ١٠٠°
- ١٠٠ + ٣٦٠° = ٢٦٠°
١٨٠° > ٢٦٠° > ٢٧٠° الربع الثالث

٤) ٧٢٠°
٧٢٠ - ٣٦٠° = ٣٦٠° زاوية ربعية

الواجب

١ أكمل

١) تكون الزاوية الموجهة فى الوضع القياسى إذا ـ ـ ـ ، ـ ـ ـ

٢) إذا كانت عدة زوايا موجهة لها نفس الضلع النهائي فإنها تسمى ـ ـ ـ

٣) إذا كان θ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى فإن الزوايا التى قياساتها (θ ± ن × ٣٦٠°) تسمى ـ ـ ـ

٤) إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهة على أحد محورى الاحداثيات تسمى الزاوية ـ ـ ـ

٥) الزاوية التى قياسها - ٨٥٠° تكافئ زاوية موجبة = ـ ـ ـ وتقع فى الربع ـ ـ ـ

٦) الزاوية التى قياسها ١٢٠٠ تقع فى الربع ـ ـ ـ وتكافئ زاوية سالبة = ـ ـ ـ

٢ عين زاوية موجبة وأخرى سالبة وحدد الربع لكل من

١) ٧٠°
٢) - ١٥٠°
٣) ٥٧٠°
٤) - ٤٩٠°

اختبر على الدرس الأول

(١) الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها

(أ) ١٢٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٤٢٠°

(٢) الزاوية التى قياسها ٥٨٥° تكافئ ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(٣) الربع الذى تقع فيه الزاوية ١٦٧٠° هو...

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

(٤) الزاوية التى قياسها (−٨٥٠°) تقع فى الربع...

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

(٥) الزاوية التى قياسها ٤٥° + (٤ن+١) × ٩٠°

تقع فى الربع ... حيث ن ∈ ص

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

عند وضع ن = ٠ ∴ هـ = ٤٥ + ٩٠ = ١٣٥°

(٦) إذا كان أ ، ب قياسا زاويتان متكافئتين

فإن −أ ، −ب يكونان ...

(أ) متطابقين (ب) متكافئتين

(جـ) متتامتين (د) مجموعهما ٣٦٠°

(٧) إذا كان أ ، −أ قياسا زاويتين متكافئتين

فإن إحدى قيم أ هى ...

(أ) ١٥٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٨) إذا كان (٣س − ٥) أصغر قياس موجب

، (٣ص − ٥) أكبر قياس سالب

لزاويتين متكافئتين فإن س − ص = ...

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٩٠°

٣س − ٥ − (٣ص − ٥) = ٣٦٠

٣س − ٥ − ٣ص + ٥ = ٣٦٠

٣س − ٣ص = ٣٦٠ ∴ س − ص = ١٢٠°

(٩) إذا دار الضلع النهائى لزاوية قياسها ٦٠°

فى الوضع القياسى دورتين وربع فى عكس اتجاه

عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يمثل...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ٢٤٠°

احذف عدد الدورات الكاملة واحسب الربع فقط

∴ ٦٠° + ٩٠° = ١٥٠°

نفسي ارجع للزمن اللي كان

أصعب قرار بيواجهني هو

يا تري اشتري شيبسي بالطماطم

ولا بالشطه والليمون

الدرس الثاني
القياس الستيني والقياس الدائري

القياس الستيني (سْ)

١° = ٦٠َ

١َ = ٦٠ً

∴ ١° = ٣٦٠٠ً

القياس الدائري $\theta^{د}$

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$

$\theta^{د}$ ← الزاوية بالقياس الدائري

ل ← طول القوس المقابل للزاوية المركزية

نق ← نصف قطر الدائرة.

ملحوظة

الزاوية النصف قطرية: هي زاوية مركزية تحصر قوساً (ل) طوله = نصف قطر الدائرة (نق)

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{نق}{نق} = ١^{د}$

∴ الزاوية النصف قطرية = $١^{د}$

مثال ١

أوجد القياس الدائري لكل مما يأتي:

(١) ل = ١٢ سم ، نق = ١٠ سم

الحل

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٢}{١٠} = ١,٢^{د}$

(٢) ل = ٧ سم ، طول القطر = ٢٠ سم

الحل

ل = ٧ سم ، نق = $\frac{٢٠}{٢}$ = ١٠ سم

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق} = \frac{٧}{١٠} = ٠,٧^{د}$

مثال ٢

أوجد نق لكل مما يأتي:

$\theta^{د} = ١,٥^{د}$ ، ل = ١١ سم

الحل

$\theta^{د} = \frac{ل}{نق}$

نق = $\frac{ل}{\theta^{د}} = \frac{١١}{١,٥}$ = ٧,٣٣ سم

مثال ٣

أوجد طول القوس

نق = ١٢,٥ سم ، $\theta^{د} = ١,٦^{د}$

الحل

ل = $\theta^{د}$ × نق

ل = ١,٦ × ١٢,٥ = ٢٠ سم

مهم جداً

العلاقة بين الدائرى "$\theta^{د}$" والستينى "س°"

$$\frac{س^{\circ}}{180^{\circ}} = \frac{\theta^{د}}{\pi}$$

$$س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{180}{\pi}$$ وتقل D°°°

$$\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{180}$$ وتقل D⇔S

علشان متنساش

١) الستينى أكبر لذلك يبقى $\times \frac{180}{\pi}$

٢) الدائرى أصغر لذلك يبقى $\times \frac{\pi}{180}$

ولو نسيت احفظ أول مربع هيجيلك القانونين

مثال ٤ حول إلى القياس الدائرى

١) 120° ⟸ س° = 120°

$\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{180} = 120 \times \frac{\pi}{180} = 2.09^{د}$

٢) $22' \; 105^{\circ}$

$\theta^{د} = س^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$

$= 22' \; 105^{\circ} \times \frac{\pi}{180}$

$= 1.84^{د}$

٣) $30'' \; 12' \; 75^{\circ}$

$\theta^{د} = 30'' \; 12' \; 75^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}}$

$\theta^{د} = 1.31^{د}$

مثال حول إلى القياس الستينى

١) $1.8^{د}$

$س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{180}{\pi} = 1.8 \times \frac{180}{\pi}$

$= 56'' \; 7' \; 103^{\circ}$

٢) $\frac{1}{4}\pi$

$س^{\circ} = \theta^{د} \times \frac{180}{\pi} = \frac{1}{4}\pi \times \frac{180}{\pi} = 45^{\circ}$

مثال ٦ حدد الربع الذى تقع فيه

١) $5.7^{د}$

$س^{\circ} = 5.7 \times \frac{180}{\pi} = 35' \; 326^{\circ}$

فى الربع الرابع

الفكرة الثامنة

مثال ٧ أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها ٣٥ً ١٢َ ١١٠° إذا كان نق = ١٠ سم لأقرب سم

الحل

س° = ٣٥ً ١٢َ ١١٠° نق = ١٠ سم

الأول هنحول للدائري

$\theta^{د}$ = س° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٣٥ً ١٢َ ١١٠° × $\frac{\pi}{١٨٠}$

= ١,٩٢ د

∵ ل = $\theta^{د}$ × نق

= ١,٩٢ × ١٠ = ١٩,٢ ≃ ١٩ سم

مثال ٨ أوجد القياس الدائري والقياس الستيني لزاوية محيطية = ٨٠°

الحل

طبعاً نحن نعمل بالزاوية المركزية وانتوا فاكرين إن المركزية ضعف المحيطية = ٢ × ٨٠ = ١٦٠°

∴ س° = ١٦٠°

$\theta^{د}$ = ١٦٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٢,٧٩ د

المركزية = المحيطية × ٢

المحيطية = المركزية ÷ ٢

مثال ٩ أوجد محيط دائرة بها زاوية محيطية = ٣٠° يقابلها قوس = ٥ سم

الحل

∵ قياس المحيطية = ٣٠°

∴ قياس المركزية المشتركة معها في القوس = ٦٠°

س° = ٦٠°

∴ $\theta^{د}$ = س° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٦٠° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = $\frac{\pi}{٣}$

نق = $\frac{ل}{\theta^{د}}$ = $\frac{٥}{(\frac{\pi}{٣})}$

= $\frac{١٥}{\pi}$ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × π × $\frac{١٥}{\pi}$ = ٣٠ سم

ملحوظة

في مسائل محيط ومساحة الدائرة يفضل تجيب القياس الدائري ونق بدلالة π

طبعاً انت فاكر إن

١) محيط الدائرة = ٢ π نق

٢) مساحة الدائرة = π نق²

مثال ١٠ من الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{أجـ}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماسان للدائرة م

، ق (جـ م̂ ب) = ١٢٠° ، أم = ١٢ سم

أوجد طول القوس الأكبر جـ ب لأقرب سم

الحل

من هندسة الشكل ق (أ̂) = ٦٠°

$\because$ $\overleftrightarrow{أجـ}$ ⊥ $\overline{مجـ}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overline{مب}$

(لأن المماس ⊥ نصف القطر)

$\therefore$ ق (جـ م̂ ب) = ٣٦٠ − [٩٠ + ٩٠ + ٦٠]

= ١٢٠°

$\therefore$ ق (جـ م̂ ب) المنعكسة = ٣٦٠ − ١٢٠°

= ٢٤٠°

$\therefore$ هـ = ٢٤٠° × $\frac{\pi}{180}$ = $\frac{4}{3}\pi$

فى △ أ ب م $\because$ أم = ١٢ سم

$\therefore$ ب م = ٦ سم لأنه طول الضلع المقابل (٣٠°) فى المثلث القائم = نصف طول الوتر

$\therefore$ نق = ٦ سم

ل = هـ × نق = $\frac{4}{3}\pi$ × ٦ = ٢٥ سم

مثال ١١ مثلث قياس احدى زواياه ٦٠° وقياس زاوية أخرى $\frac{\pi}{4}$ أوجد القياس الدائرى والستينى للزاوية الثالثة.

الحل

قياس الاولى = ٦٠°

قياس الثانية = $\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi}$ = ٤٥°

$\therefore$ قياس الثالثة = ١٨٠ − [٦٠ + ٤٥]

س° = ٧٥°

هـ° = س° × $\frac{\pi}{180}$ = ٧٥ × $\frac{\pi}{180}$ = ١٫٣١ ء

مثال ١٢ زاويتان متكاملتان الفرق بينهما = $\frac{\pi}{3}$ أوجد قياسهما بالدائرى والستينى

س° = $\frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi}$ = ٦٠°

الفرق بينهما = ٦٠°

الحل

س + ص = ١٨٠°

س − ص = ٦٠°

٢س = ٢٤٠ $\therefore$ س = ١٢٠°

= ١٢٠ × $\frac{\pi}{180}$ = $\frac{2}{3}\pi$

١٢٠ + ص = ١٨٠°

$\therefore$ ص = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

= ٦٠ × $\frac{\pi}{180}$ = $\frac{1}{3}\pi$

اختبر فهمك للدرس

(١) الزاوية التي قياسها $\frac{31\pi}{6}$ تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

(٢) الزاوية التي قياسها $-\frac{9\pi}{4}$ تقع في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

(٣) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ...

(أ) 2π (ب) π (ج) $\frac{3\pi}{2}$ (د) 3π

(٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أي مضلع منتظم = $180 \times (n-2)$ حيث n عدد الأضلاع فإن قياس زاوية الخماسي المنتظم = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{7\pi}{2}$ (ج) $\frac{3\pi}{5}$ (د) $\frac{2\pi}{3}$

$\frac{(5-2)\times 180}{5} = \frac{540}{5} = 108$ ، $108 = \frac{3\pi}{5}$

(٥) القوس الذي طوله 5π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها = ...

(أ) $30°$ (ب) $60°$ (ج) $90°$ (د) $180°$

$\theta = \frac{ل}{نق} = \frac{5\pi}{15} = \frac{\pi}{3} = \frac{180}{3} = 60°$

$\pi = 180$

(٦) بندول بسيط طول خيطه ١٤ سم يتذبذب بزاوية قياسها $\frac{1}{10}\pi$ فإن طول قوسه = ... سم

(أ) ٤٫٦ (ب) ٤٫٤ (ج) ٤٫٢ (د) ٤٫٨

نق = ١٤ ، ل = θ × نق = $14 \times \frac{1}{10}\pi = 4.4$

$\frac{22}{7}$ = ٣٫١٤

> لاحظ أنه في الزوايا $\pi = 180°$
> في الأطوال $\pi = \frac{22}{7}$ أو ٣٫١٤

(٧) إذا كان طول قوس من الدائرة = $\frac{3}{8}$ محيطها فإن الزاوية المركزية المقابلة له هي ....

(أ) $30°$ (ب) $67°30'$ (ج) $135°$ (د) $43°$

ل = θ × نق ∴ $\frac{3}{8} \times 2\pi$ نق = θ × نق

∴ $\theta = \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4} \times 180 = 135°$

(٨) في الدائرة التي طول نصف قطرها وحدة الطول قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائري = ...

(أ) $\frac{1}{4}$ طول القوس (ب) $\frac{1}{2}$ طول القوس (ج) طول القوس (د) ضعف طول القوس

ل = θ × نق عندما نق = ١ ∴ ل = θ

(٩) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا شكل رباعي كنسبة ٥ : ٤ : ٩ : ٦ فإن قياس أصغر زواياه = ...

(أ) $\frac{\pi}{12}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (ج) $\frac{5\pi}{12}$ (د) $\frac{2\pi}{3}$

مجموع الأجزاء = ٢٤ أصغر الزوايا هي = $\frac{360}{24} \times 4 = 60$

> ملحوظة: قياس الزاوية بين عقرب الساعات والدقائق = | عدد الساعات × ٣٠ − عدد الدقائق × $\frac{11}{2}$ |

(١٠) القياس الموجب بين عقربي الساعة عندما الساعة الثانية والنصف = ...

[٢ : ٣٠]

$2 \times 30 - 30 \times \frac{11}{2} = 105- = 105 \div 180$

$= \frac{7\pi}{12}$

تذكر أن

١) مجموع قياس الزاويتين المتتامتين = ٩٠°

٢) " " " المتكاملتين = ١٨٠°

٣) فى المثلث القائم طول الضلع المقابل

* للزاوية ٣٠° = $\frac{1}{2}$ × طول الوتر
* للزاوية ٦٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × طول الوتر

٤) مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

٥) قياس الدائرة = ٣٦٠°

٦) محيط الدائرة = ٢ط نق

٧) مساحة الدائرة = ط نق²

الواجب

١ أكمل

١) الزاوية التى قياسها $\frac{31\pi}{6}$ تقع فى الربع ----

٢) الزاوية التى قياسها $-\frac{9\pi}{4}$ تقع فى الربع ----

٣) الزاوية التى قياسها $\frac{8\pi}{3}$ فإن قياسها الدائرى = ----

٤) الزاوية التى قياسها ٣,١ د فإن قياسها الستينى = ----

٥) مجموع قياسات زوايا المثلث بالدائرى = ----

٦) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى = ----

٧) القوس الذى طوله ٥ سم فى دائرة طول قطرها ٣٠ سم يقابل زاوية مركزية = ----°

٨) الزاوية التى طول قوسها = نق تسمى زاوية ----

٩) الدائرة التى طول نصف قطرها = وحدة الأطوال تسمى ----

٢
أوجد طول القوس الذى تحصره زاوية مركزية ٣٠َ ١٠٢° فى دائرة نصف قطرها = ٦ سم لأقرب ١ سم

٣
أوجد كلا من القياس الدائرى والستينى لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ٦٠ سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٧ سم

٤
أوجد محيط الدائرة التى بها زاوية محيطية = ٥٧° تقابل قوس طوله ٣ سم

الوفاء
غالي جدا فلا تتوقعه
من رخيص

الدرس الثالث
الدوال المثلثية

تذكر أن

$جا\theta = \frac{المقابل}{الوتر}$

$جتا\theta = \frac{المجاور}{الوتر}$

$ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta} = \frac{المقابل}{المجاور}$

الوتر — المقابل — المجاور — θ

الدوال المثلثية من دائرة الوحدة

ملاحظات

١) **دائرة الوحدة** : هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة الأطوال

٢) $س^٢ + ص^٢ = ١$

، $س \in [-١ ، ١]$

، $ص \in [-١ ، ١]$

٣) $جا\theta = ص$ الاحداثي الصادي

٤) $جتا\theta = س$ الاحداثي السيني

٥) $ظا\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta} = \frac{ص}{س}$

المقلوبات

١) $قا\theta = \frac{١}{جتا\theta}$

٢) $قتا\theta = \frac{١}{جا\theta}$

٣) $ظتا\theta = \frac{١}{ظا\theta}$

الفكرة الاولى
مباشرة

مثال ١ أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ مرسومة في دائرة الوحدة إذا كانت إحداثيات ضلعها النهائي

١) $(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ (س ، ص)

الحل

$جا\theta = ص = \frac{٤}{٥} \leftarrow قتا\theta = \frac{٥}{٤}$

$جتا\theta = س = \frac{٣}{٥} \leftarrow قا\theta = \frac{٥}{٣}$

$ظا\theta = \frac{\frac{٤}{٥}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٤}{٣} \leftarrow ظتا\theta = \frac{٣}{٤}$

$(1 , 0)$ (س ، ص)

الحل

جا θ = ص = ١ ⟸ قتا θ = $\frac{1}{1}$ = ١

جتا θ = س = ٠ ⟸ قا θ = $\frac{1}{0}$ = غير معرف

ظا θ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{1}{0}$ غير معرف ⟸ ظتا θ = $\frac{0}{1}$ = صفر

$(-1 , 0)$

الحل

جا θ =   قتا θ =

جتا θ =   قا θ =

ظا θ =   ظتا θ =

---

٤) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

الحل

جا θ =   قتا θ =

جتا θ =   قا θ =

ظا θ =   ظتا θ =

الفكرة الثانية تحتاج معادلة

٥) أ $\left(\frac{-1}{2} , ص\right)$ حيث ص > ٠

الحل

∵ س² + ص² = ١

$\left(\frac{-1}{2}\right)^2$ + ص² = ١

$\frac{1}{4}$ + ص² = ١

ص² = $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

∴ ص = $\pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ ص > ٠ ∴ ص = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ أ $\left(\frac{-1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (س ، ص)

جا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ قتا θ = $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

جتا θ = $\frac{-1}{2}$ قا θ = $\frac{2}{-1} = -2$

ظا θ = $\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ ظتا θ = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

---

٦) أ(-ص ، -ص) ، ص > ٠

الحل

(-ص)² + (-ص)² = ١

ص² + ص² = ١

٢ص² = ١ ⟸ ص² = $\frac{1}{2}$

∴ ص = $\pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

∵ ص > ٠ ∴ ص = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ أ $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} , \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

جا θ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ قتا θ = $\frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$

جتا θ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ قا θ = $-\sqrt{2}$

ظا θ = ١   ظتا θ = ١

أ$(-س ، س)$ حيث $س > ٠$

الحل

$(-س)^٢ + (س)^٢ = ١$

$س^٢ + س^٢ = ١ \Leftarrow ٢س^٢ = ١$

$س^٢ = \frac{١}{٢}$ ، $س = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\because س > ٠ \quad \therefore س = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore$ أ$\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

$جا\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}} \leftarrow قتا\,\theta = \sqrt{٢}$

$جتا\,\theta = \frac{-١}{\sqrt{٢}} \leftarrow قا\,\theta = -\sqrt{٢}$

$ظا\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٢}} \div \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -١ \leftarrow ظتا\,\theta = \frac{-١}{١} = -١$

اشارات الدوال المثلثية

جا ، قتا موجبتان والباقى سالب	كل الدوال موجبة
ظا وظتا موجبتان والباقى سالب	جتا ، قا موجبتان والباقى سالب

كل جبار ظالم جتا داهية تافه

مثال حدد اشارة كل من النسب المثلثية

1) $جا\ ١٢٠^\circ$

$١٢٠^\circ \Leftarrow$ فى الربع الثانى [جا موجبة]

2) $جتا\ ٩٧٠^\circ$

$(٩٧٠ - ٣٦٠) = ٦١٠ - ٣٦٠ = ٢٥٠^\circ$

٢٥٠° فى الربع الثالث جتا سالبة

3) $قتا\left(\frac{-٣}{٥}\pi\right)$

$\left(\frac{-٣}{٥} \times ١٨٠\right) = -١٠٨ + ٣٦٠ = ٢٥٢^\circ$

فى الربع الثالث ظا وظتا موجبتان

$\therefore$ الاشارة موجبة

انت ممكن تكتبهم على الآلة وتشوف الاشارة وتريح نفسك

ومتنساش (π) فى النسب $= ١٨٠^\circ$

الفكرة الثانية غير مباشرة

(١) إذا كانت $(0.8 ، ص)$ نقطة تقع على الضلع النهائي لزاوية موجهة قياسها θ في وضعها القياسي مع دائرة الوحدة حيث $270° < \theta < 360°$ فأوجد قيم جاθ ، ظتاθ ، قاθ

الحل

$+$ص ، $-$ص ، $+$س ، $-$س

$\because$ $س^2 + ص^2 = 1$

$(0.8)^2 + ص^2 = 1$

$ص^2 = 1 - (0.8)^2 = 0.36$

$\therefore$ $ص = \pm\sqrt{0.36} = \pm 0.6$

$\because$ $270° < \theta < 360°$ في الربع الرابع تكون س موجبة، ص سالبة (جا)

$\therefore$ $ص = -0.6$

$\therefore$ $(0.8 ، -0.6)$

جا$\theta = -0.6$

ظتا$\theta = \frac{جتا\theta}{جا\theta} = \frac{س}{ص} = \frac{0.8}{-0.6} = \frac{-4}{3}$

قا$\theta = \frac{1}{جتا\theta} = \frac{1}{س} = \frac{1}{0.8} = \frac{5}{4}$

(٢) أ$(س ، \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، $90° < \theta < 180°$

أوجد قيمة

جاθ قاθ ظاθ

الحل

$\because$ $س^2 + ص^2 = 1$

$س^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$

$س^2 + \frac{3}{4} = 1$

$س^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$س = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

$\because$ $90° < \theta < 180°$

في الربع الثاني تكون (س جتا) سالبة

أ$(-\frac{1}{2} ، \frac{\sqrt{3}}{2})$

جا$\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

قا$\theta = \frac{1}{جتا\theta} = \frac{1}{(\frac{-1}{2})} = \frac{2}{-1} = -2$

ظا$\theta = \frac{جا\theta}{جتا\theta} = \frac{ص}{س} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{-1}{2}$

$= -\sqrt{3}$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

* أولاً: ٣٠°، ٦٠°

٣٠°	٦٠°
جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$	جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$
ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$	ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

* ثانياً: ٤٥°

جا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

جتا ٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

ظا ٤٥ = ١

* ثالثاً: الزوايا الربعية

(١، ٠) صفر° ، ٣٦٠° — جتا جا

(٠، ١) ٩٠° — جتا جا

(-١، ٠) ١٨٠° — جتا جا

(٠، -١) ٢٧٠° — جتا جا

لو فهمت أنا ازاى كتبت الاحداثيات بتاعت دائرة الوحدة وعرفت إن جتا = س ، جا = ص هتعرف تفهم كويس جداً الجدول اللى هكتبه

١ الزاوية ٠° أو ٣٦٠° (١، ٠)

جا ٠° = ٠

جتا ٠° = ١

ظا ٠ = $\frac{جا}{جتا}$ = $\frac{٠}{١}$ = صفر

٢ الزاوية ٩٠° (٠، ١)

جا ٩٠° = ١

جتا ٩٠° = ٠

ظا ٩٠° = غير معرف

٣ الزاوية ١٨٠° (-١، ٠)

جا ١٨٠° = ٠

جتا ١٨٠° = -١

ظا ١٨٠° = صفر

٤ الزاوية ٢٧٠° (٠، -١)

جا ٢٧٠° = -١

جتا ٢٧٠° = ٠

ظا ٢٧٠° = غير معرف

في الجنة هناك بيوتا تبنى بالذكر فاذكروا الله كثيراً ♡.

مثال ٤: بدون استخدام الآلة أوجد قيمة كلاً من

١) ٤ جا ٣٠° جا ٩٠° − جتا ٠° قا ٦٠° + ٥ ظا ٤٥°

الحل

$٤ \times \frac{١}{٢} \times ١ - ١ \times ٢ + ٥ \times ١$

$٢ - ٢ + ٥ = ٥$

٢) جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا² ٤٥° جا ٣٠° − جتا ٧٠° جا ١٨٠°

الحل

$٠ \times ٢ + (\sqrt{٢})^٢ \times \frac{١}{٢} - ٠ \times ٠$

$٠ + ٢ \times \frac{١}{٢} - ٠ = ١$

٣) ٣ جا ٣٠° ظا ٤٥° − ٢ قا² ٤٥° − ظا² ٦٠° + جا ٦٠° ظا ٣٠°

الحل

$٣ \times \frac{١}{٢} \times ١ - ٢ \times (\sqrt{٢})^٢ - (\sqrt{٣})^٢ + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\frac{٣}{٢} - ٤ - ٣ + \frac{١}{٢} = -٥$

٤) ٣ ظا² ٣٠° + $\frac{٤}{٣}$ جتا² ٣٠° − $\frac{١}{٨}$ قا⁴ ٦٠°

الحل

$٣ \times (\frac{١}{\sqrt{٣}})^٢ + \frac{٤}{٣} \times (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ - \frac{١}{٨} \times (\frac{٢}{١})^٤$

$٣ \times \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٨} \times ١٦$

$١ + ١ - ٢ =$ صفر

٥) اثبت أن

جتا $\frac{\pi}{٢}$ = جتا² $\frac{\pi}{٤}$ − جا² $\frac{\pi}{٤}$

الحل

الطرف الأيمن = جتا $(\frac{\pi}{٢})$ = جتا $(\frac{١٨٠}{٢})$ = جتا ٩٠°

جتا ٩٠° = ٠

الطرف الأيسر = جتا² $(\frac{١٨٠}{٤})$ − جا² $(\frac{١٨٠}{٤})$

= جتا² ٤٥ − جا² ٤٥

$(\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ - (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ =$ صفر

∴ الطرفان متساويان

٦) أوجد قيمة س التي تحقق أن

س جا $\frac{\pi}{٦}$ جتا² $\frac{\pi}{٤}$ = جتا² ٣٠° جا $\frac{\pi}{٢}$

الحل

∵ س جا ٣٠° جتا² ٤٥° = جتا² ٣٠° جا ٩٠°

∴ $س \times \frac{١}{٢} \times (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ = (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ \times ١$

$س \times \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

∴ $س = \frac{٣}{٤} \div (\frac{١}{٤})$

∴ س = ٣

* عندك طرق تبسيط
* تقسم على المعامل
* أو تضرب فى المقلوب الضربى للمعامل

اختبر نفسك على الدرس ٣

① إذا كان جا θ = -١ ، جتا θ = ٠ فإن θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (ج) $\frac{3\pi}{2}$ (د) 2π

② إذا كانت قتا θ = ٢ حيث θ حادة فإن θ = ...

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٦٠°

جا θ = $\frac{1}{2}$

③ إذا كان ظا θ = ١ فإن θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٩٠°

④ إذا كان جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن جا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ج) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

θ = ٣٠° ∴ جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

⑤ إذا كان جتا θ = $\frac{1}{2}$ ، جا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{5\pi}{6}$ (ج) $\frac{5\pi}{3}$ (د) $\frac{11\pi}{6}$

⑥ إذا كان ب أ ج مثلث قائم في ب وكان ق(أ) = ٢ق(ج)

فإن قا أ + قتا ج = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

ق(أ) = ٦٠° ق(ج) = ٣٠°

قا ٦٠° = $\frac{1}{\text{جتا } 60°}$ = ٢ قتا ٣٠° = $\frac{1}{\text{جا } 30°}$ = ٢

٢ + ٢ = ٤

⑦ إذا كان أ هي أكبر زاوية حادة في مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣ سم فإن ظتا أ = ...

(أ) $\frac{12}{13}$ (ب) $\frac{5}{13}$ (ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{12}{5}$

دي زاوية حادة في مثلث قائم

ظتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ = $\frac{5}{12}$

⑧ في الشكل المقابل

د ب جتا ب + د ج جتا ج = ...

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ١٤ (د) ٤٨

$\frac{8}{\text{أج}} \times \text{أج} + \frac{6}{\text{أب}} \times \text{أب}$ = ٦ + ٨ = ١٤

⑨ في الشكل المقابل

ص = ٢ س

فإن جا θ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ج) ٠,٨٩ (د) $\frac{1}{3}$

الميل = ٢ ∴ ظا θ = ٢ ∴ θ = ظا⁻¹ ٢ = □

جا □ = ٠,٨٩

إذا خدعك شخص فهو حقير
وان خدعك مره اخرى فهو أحقر
وان خدعك مرة ثالثة

فـــ أنت مسخره الصراحه

الواجب

١ ابحث إشارة

1. جا ٧٠°
2. ظا ١٢٠°
3. قتا ١٢٠٠°
4. ظا ٤١٠°

٢ أوجد جميع النسب المثلثية لـ θ

1. $(\frac{٢}{٣} ، \frac{\sqrt{٥}}{٣})$
2. (٠,٦ ، -٠,٨)
3. (-١ ، ٠)

٣ أوجد النسب المثلثية إذا كان

1. أ(س ، $\frac{١}{٢}$) ، س > ٠
2. أ(٠,٦ ، ص) ، ص < ٠
3. أ(س ، -س) ، س > ٠
4. أ(-س ، -س) ، س < ٠

٤ أوجد قيمة ما يلي

1. جا ٠° + جا ٢٧٠° + جا ٩٠° + جا ١٨٠°
2. ظا² ٣٠° + ٢ جا² ٤٥° + جتا² ٩٠°
3. جتا $\frac{\pi}{٢}$ جتا ٠ + جا $\frac{٣\pi}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٢}$
4. ٣ جا ٣٠° جا² ٦٠° - جتا ٠° قا ٦٠° + جا ٢٧٠° جتا² ٤٥°

٥ اثبت أن

1. جا ٦٠° جتا ٣٠° - جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا² $\frac{\pi}{٤}$
2. جا $\frac{\pi}{٢}$ = جتا² $\frac{\pi}{٤}$ - جا² $\frac{\pi}{٤}$
3. ٢ جا² ٩٠° = -٢ جتا ١٨٠°

٦ أوجد قيمة س إذا كان

1. س جا² $\frac{\pi}{٤}$ جتا π = ظا² $\frac{\pi}{٣}$ جا $\frac{٣\pi}{٢}$
2. س جا $\frac{\pi}{٤}$ جتا $\frac{\pi}{٤}$ قتا $\frac{\pi}{٦}$ = ظا² $\frac{\pi}{٤}$ - جتا² $\frac{\pi}{٣}$

من قال سبحان الله وبحمده غرست له نخلة في الجنة

لا حول ولا قوة إلا بالله كنز من كنوز الجنة

أكثروا من ذكر الله حتى لا يشغلكم الشيطان ويضيع عليكم أوقات المذاكرة.

وفقكم الله

الدرس الرابع
الزوايا المنتسبة

لاحظ أن

١) جا (١٨٠ - θ) = جا θ   لأنها فى الربع الثانى

٢) جتا (١٨٠ - θ) = - جتا θ

٣) ظا (١٨٠ - θ) = - ظا θ

فى الربع الثالث

١) جا (١٨٠ + θ) = - جا θ

٢) جتا (١٨٠ + θ) = - جتا θ

٣) ظا (١٨٠ + θ) = ظا θ

فى الربع الرابع

١) جا (٣٦٠ - θ) = - جا θ

٢) جتا (٣٦٠ - θ) = جتا θ

٣) ظا (٣٦٠ - θ) = - ظا θ

الزاوية (- θ) تكافئ (٣٦٠ - θ) يعنى فى الربع الرابع

١) جا (- θ) = - جا θ

٢) جتا (- θ) = جتا θ

٣) ظا (- θ) = - ظا θ

الزاويتين ٩٠° ± θ ، ٢٧٠° ± θ بتعمل تغيير تام

جا ← جتا ، جتا ← جا

فى الربع الثانى

١) جا (٩٠ + θ) = جتا θ

٢) جتا (٩٠ + θ) = - جا θ

٣) ظا (٩٠ + θ) = - ظتا θ

فى الربع الثالث

١) جا (٢٧٠ - θ) = - جتا θ

٢) جتا (٢٧٠ - θ) = - جا θ

٣) ظا (٢٧٠ - θ) = ظتا θ

فى الربع الرابع

١) جا (٢٧٠ + θ) = - جتا θ

٢) جتا (٢٧٠ + θ) = جا θ

٣) ظا (٢٧٠ + θ) = - ظتا θ

ده ملخص للزوايا اللي هتقابلك

$120° = (180° - 60°)$

$135° = (180° - 45°)$

$150° = (180 - 30°)$

$210° = (180° + 30°)$

$225° = (180 + 45°)$

$240° = (180° + 60°)$

$300° = (360° - 60°) = -60°$

$315° = (360° - 45°) = -45°$

$330° = (360° - 30°) = -30°$

لاحظ

أنا عملتهم بدلالة $180°$ لأنها أسهل مفيهاش تغيير شائي تبكون أسهل من $90°$ أو $270°$

وتحفظ الصفحة اللي فاتت واشارات الدوال وانت تبقى ممتاز إن شاء الله

أوجد قيمة ما يأتي

جتا $240°$

الحل

جتا $(180 + 60)°$ في الربع الثالث

$=$ − جتا $60 = -\frac{1}{2}$

جا $570°$

الحل

جا$(570° - 360°) =$ جا$(210°)$

$=$ جا $(180° + 30°)$ في الربع الثالث

$=$ − جا $30 = -\frac{1}{2}$

ظتا $135°$

الحل

ظتا $(180° - 45°)$ في الربع الثاني

$=$ − ظتا $45 = -1$

٤

ظا $(-150°)$

ظا $(-150 + 360°) =$ ظا$(210°)$

$=$ ظا $(180 + 30) =$ ظا $30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

بدون استخدام الآلة أوجد قيمة كلاً منه

جتا (−١٥٠°) جا ٦٠٠° + جتا ٢π/٣ جا ٣٣٠° − قا (−٥π/٤) ظا ٩٠٠°

الحل

هنحول السالب لقياس موجب + ٣٦٠°

واللي أكبر من ٣٦٠° هنطرح منه ٣٦٠°

جتا (−١٥٠° + ٣٦٠°) جا (٦٠٠° − ٣٦٠°) + جتا (٢×١٨٠)/٣ جا ٣٣٠° − قا (٥×١٨٠)/٤ ظا (٩٠٠ − ٣٦٠ − ٣٦٠)

جتا ٢١٠° جا ٢٤٠° + جتا ١٢٠° جا ٣٣٠° − قا ٢٢٥° ظا ١٨٠°

جتا (١٨٠° + ٣٠°) جا (١٨٠° + ٦٠°) + جتا (١٨٠° − ٦٠°) جا (٣٦٠° − ٣٠°) − قا ٢٢٥° × صفر

(−جتا ٣٠) × (−جا ٦٠) + (−جتا ٦٠°) × (− جا ٣٠°) − صفر

[−√٣/٢ × −√٣/٢] + [−١/٢ × −١/٢] − صفر = ٣/٤ + ١/٤ = ١

جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

الحل

جا ١٥٠° جتا (−٣٠٠° + ٣٦٠°) + جتا (٩٣٠° − ٣٦٠° − ٣٦٠°) ظتا ٢٤٠°

جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (٦٠°) + جتا ٢١٠° ظتا (١٨٠° + ٦٠°)

جا ٣٠° جتا ٦٠° + (− جتا ٣٠°) (ظتا ٦٠°)

١/٢ × ١/٢ − √٣/٢ × ١/√٣ = ١/٤ − ١/٢ = −١/٤

جتا ٢١٠° = جتا (١٨٠ + ٣٠°)

ظا ٦٠° = √٣

ظتا ٦٠° = ١/√٣

مثال ٤

جا ٦٠٠° جتا (− ٣٠°) + جا ١٥٠° جتا (− ٢٤٠°)

الحل

جتا (−θ) = جتا θ

جا (٦٠٠° − ٣٦٠°) جتا ٣٠° + جا ١٥٠° جتا (−٢٤٠° + ٣٦٠°)

جا ٢٤٠° جتا ٣٠° + جا ١٥٠° جتا ١٢٠°

جا (١٨٠° + ٦٠°) جتا ٣٠° + جا (١٨٠° − ٣٠°) جتا (١٨٠° − ٦٠°)

(− جا ٦٠°) جتا ٣٠° + جا ٣٠° (− جتا ٦٠°)

[−√٣/٢ × √٣/٢] + [١/٢ × ١/٢] = −٣/٤ − ١/٤ = −١

الحل العام للمعادلات المثلثية

إذا كان

① $جا\ \alpha = جتا\ \beta$ فإن $\alpha \pm \beta = 90^\circ + 360^\circ ن$

② $قتا\ \alpha = قا\ \beta$ فإن $\alpha \pm \beta = 90 + 360^\circ ن$

③ $ظا\ \alpha = ظتا\ \beta$ فإن $\alpha + \beta = 90^\circ + 180^\circ ن$

حيث ن = ٠ ، ±١ ، ±٢ ، ... ، ن ∈ ص

مثال ① أوجد مجموعة حل المعادلة $جتا\ 2\theta = جا\ 4\theta$ حيث $\theta \in]0 ، \frac{\pi}{2}[$

$\frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

الحل

$\because جا\ 4\theta = جتا\ 2\theta$

$\therefore (4\theta \pm 2\theta) = 90 + 360^\circ ن$

إما $6\theta = 90^\circ + 360^\circ ن$

عندما ن = ٠: $6\theta = 0\times360 + 90^\circ$

$6\theta = 90 \quad \therefore \theta = \frac{90}{6} = 15^\circ$ تحقق

عندما ن = ١: $6\theta = 1\times360 + 90$

$6\theta = 450$

$\theta = \frac{450}{6} = 75^\circ$ تحقق

عندما ن = ٢: $6\theta = 2\times360 + 90 = 810^\circ$

$\theta = \frac{810}{6} = 135^\circ$ مرفوض

أو $2\theta = 90^\circ + 360^\circ ن$

ن = ٠: $2\theta = 90^\circ + 0$

$2\theta = 90^\circ \quad \theta = \frac{90}{2} = 45^\circ$ تحقق

عندما ن = ١: $\therefore 2\theta = 90 + 360\times1$

$2\theta = 450$

$\theta = \frac{450}{2} = 225^\circ$ مرفوض

$\therefore$ م.ح = $\{15^\circ ، 45^\circ ، 75^\circ\}$

ص② إذا كان $جا(3\theta + 20^\circ) = جتا(\theta - 30^\circ)$ حيث $\theta \in]0 ، 90[$

الحل

إما $3\theta + 20 + \theta - 30 = 90^\circ + 360 ن$

عندما ن = ٠: $4\theta - 10 = 90^\circ$

$4\theta = 100^\circ$

$\theta = 25^\circ$

مرفوض عند ن = ١ لا تحقق

أو $3\theta + 20^\circ - (\theta - 30^\circ) = 90^\circ + 360 ن$

عندما ن = ٠: $2\theta + 50^\circ = 90^\circ$

$2\theta = 40^\circ \quad \therefore \theta = 20^\circ$

$\therefore$ قيم θ هي $25^\circ ، 20^\circ$

مثال ٦ إذا كان ظا θ = ظتا ٢θ أوجد قيم θ حيث θ ∈]٠ ، π[

الحل

θ + ٢θ = ٩٠ + ١٨٠ ن

٣θ = ٩٠ + ١٨٠ ن

عندما ن = ٠ ∴ ٣θ = ٩٠°

∴ θ = ٩٠ / ٣ = ٣٠° تحقق

عندما ن = ١ ∴ ٣θ = ٩٠° + ١٨٠°

٣θ = ٢٧٠° ∴ θ = ٩٠° تحقق

عندما ن = ٢ ∴ ٣θ = ٩٠ + ٣٦٠°

٣θ = ٤٥٠° ∴ θ = ١٥٠° تحقق

عندما ن = ٣ ∴ ٣θ = ٩٠° + ٥٤٠°

٣θ = ٦٣٠ ∴ θ = ٢١٠° مرفوض

∴ قيم θ هى = {٣٠° ، ٩٠° ، ١٥٠°}

مثال ٧ أوجد مجموعة حل كلاً من المعادلات التالية

① ٢ جا θ - ١ = ٠ ، θ ∈]٠ ، π/٢[

الحل

٢ جا θ = ١ ∴ جا θ = ١/٢

جا موجبة فى الأول والثانى

لكن θ ∈ للربع الأول

∴ shift sin (1/2)

θ = ٣٠°

م.ح = {٣٠°}

② ٢ جتا θ - ١ = ٠ ، θ ∈]٠ ، ٢π[

الحل

٢ جتا θ = ١ جتا θ = ١/٢

جتا موجبة فى الأول أو الرابع

الأول: ٦٠° الرابع: ٣٦٠° - ٦٠° = ٣٠٠°

∴ م.ح = {٦٠° ، ٣٠٠°}

③ ٢ جتا (π/٢ - θ) = ١ ← تغير تام

٢ جا θ = ١

جا θ = ١/٢ فى الأول أو الثانى

الأول: ٣٠° الثانى: ١٨٠° - ٣٠° = ١٥٠°

∴ م.ح = {٣٠° ، ١٥٠°}

④ ٤ جتا² θ - ٣ = ٠ ، θ ∈]٠ ، ٢π[

الحل

٤ جتا² θ = ٣ جتا² θ = ٣/٤

جتا θ = ± √(٣/٤) = ± √٣ / ٢

يعنى موجبة (الأول والرابع)

سالبة (الثانى والثالث)

{٣٠° ، ١٨٠° - ٣٠° ، ١٨٠° + ٣٠° ، ٣٦٠° - ٣٠°}

= {٣٠° ، ١٥٠° ، ٢١٠° ، ٣٣٠°}

اختبر الدرس ٤

١) جتا θ + جتا(١٨٠ + θ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢جتا θ (د) جتا θ

جتا θ − جتا θ = ٠

٢) إذا كان θ هى قياس الزاوية فى وضعها القياسى وكان ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى (س ، −س) حيث س > ٠ فإن θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

(+ ، −) فى الربع الرابع

٣) إذا كان جا α = جتا β فإن ظا(α + β) = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) غير معرف (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

α + β = ٩٠° ظا ٩٠° غير معرف

٤) إذا كان جا ٢θ = جتا ٤θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن ظا (٩٠° − ٣θ) = ...

(أ) −١ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{3}$

٥) إذا كان أ ب جـ د شكل رباعى دائرى وكان جا أ = $\frac{3}{5}$ فإن جا جـ = ...

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $-\frac{3}{5}$ (جـ) $\frac{4}{5}$ (د) $-\frac{4}{5}$

فى الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين مجموعهما ١٨٠°

∴ جا جـ = جا(١٨٠ − أ) = جا أ = $\frac{3}{5}$

٦) إذا كان ٧س = $\frac{\pi}{2}$ فإن

$\frac{\text{جا ٣س}}{\text{جتا ٤س}} + \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{ظتا ٥س}}$ = ...

(أ) −٢ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٢

∵ ٧س = ٩٠° ∴ جا ٣س = جتا ٤س ، ظا ٢س = ظتا ٥س

∴ ١ + ١ = ٢

٧) جتا ٤٥° × جتا ٤٦° × جتا ٤٧° × ... × جتا ١٣٥° = ...

(أ) صفر (ب) −١ (جـ) ١ (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

لحاصل الضرب يحتوى × جتا ٩٠° = ٠

٨) إذا كان جتا²θ = ١ فإن θ = ... حيث ن ∈ ص

(أ) ن π (ب) $\frac{ن}{2}$ π (جـ) ٢ن π (د) (٢ن+١) π

جتا θ = ±١ ٠ أو ١٨٠° أو ٣٦٠° وهكذا

= ن π

٩) فى الشكل المقابل

ص = $-\frac{3}{4}$ س + ٥

فإن ... = ...

الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

∴ ظا θ = $\frac{4}{3}$

الواجب

١ أوجد قيمة

١) جا ٢٤٠°

٢) ظا ١٣٥°

٣) قتا $\frac{11\pi}{6}$

٤) جتا (-٩٠٠°)

٥) ظا ٤٨٠

٦) جتا (-٦٠°)

٢ أوجد قيمة

١) جا ١٥٠° ظا ٢٢٥° + جتا ٣١٥° قا (-٢١٠°) + جا (-١٣٥°) قتا (٢١٠°)

٢) جا ٦٠٠° جتا -٣٠ + جا ١٥٠° جتا (-٢٤٠°)

٣ أوجد إحدى قيم $\theta \in]٠ ، ٩٠[$

١) جا (٣θ + ١٥°) = جتا (٢θ - ٥°)

٢) ظا (θ + ٢٠°) = ظتا (٣θ + ٣٠°)

٣) جتا $\left(\frac{\theta + ٢٠°}{٢}\right)$ = جا $\left(\frac{\theta + ٤٠}{٢}\right)$

٤ حل المعادلات التالية $]٠ ، ٢\pi[$

١) ٢ جتا θ + ١ = ٠

٢) ٢ جتا θ - $\sqrt{٣}$ = ٠

٣) $\sqrt{٣}$ قتا θ = -٢

٤) ٥ ظا θ - ٥ = ٠

٥ أكمل

١) جا ٣٠° = جتا ---

٢) ظا ٢٤° = ظتا ---

٣) قا ٣٠° = قتا ---

٤) قتا ١٣° = قا ---

٥) قتا (٣٦٠ - θ) =

٦) إذا كان جا θ = جتا θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فإن θ = ---

٧) إذا كان جتا θ = جا ٢θ حيث θ زاوية حادة موجبة فإن جا ٣θ = ---

٨) إذا كان ظتا ٢θ - ظا θ = ٠ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$ فإن θ = ---°

٩) إذا كان جا α = جتا β فإن ظا (α+β) = --- غير معرف

احرص دائماً على رضا والديك وعلى صلات الأرحام.

لا تنسونا من صالح الدعاء.

الدرس الخامس
التمثيل البياني للدوال المثلثية

كل من الدالتين

د(θ) = ٩ جا ب θ ، د θ = ٩ جتا ب θ

* دورتها = $\frac{2\pi}{|ب|}$
* ومداها = [-٩ ، ٩]

والمجال دائماً]-∞ ، ∞[يعني ح

أمثلة

① د(θ) = ٢ جا θ

دورتها = ٢π

ومداها = [-٢ ، ٢]

القيمة العظمى = ٢ والقيمة الصغرى = -٢

② د(θ) = ٣ جتا ٢θ

دورتها = $\frac{2\pi}{2}$ = π

ومداها = [-٣ ، ٣]

القيمة العظمى = ٣ القيمة الصغرى = -٣

③ د(θ) = جا -٣θ

دورتها = $\frac{2\pi}{3}$

مداها [-١ ، ١]

④ د(θ) = ٧ جتا -٤θ

دورتها = $\frac{2\pi}{4}$ = $\frac{\pi}{2}$

ومداها = [-٧ ، ٧]

القيمة العظمى = ٧ القيمة الصغرى = -٧

⑤ د(θ) = ٥ طا θ

دورتها =

مداها =

⑥ د(θ) = ٣ جتا ٧θ

دورتها =

مداها =

القيمة العظمى = الصغرى =

المجال = ---

⑦ د(θ) = ٣ جا(-٨θ)

دورتها =

مداها =

القيمة العظمى = --- الصغرى = ---

المجال = ---

د(θ) = طا θ

دورتها =

مداها =

د(θ) = جتا θ

دورتها =

مداها =

٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

اختر

(١) مدى الدالة د: د(θ) = جا θ هو ....

(أ) {-١ ، ١} (ب) [-١ ، ١] (ج)]-١ ، ١[(د)]-∞ ، ∞[

(٢) القيمة العظمى للدالة ع: ع(θ) = ٥ جتا ٥θ هي ....

(أ) صفر (ب) ٥ (ج) ∞ (د) ١

(٣) الدالة د: د(θ) = ٢ جا ٤θ دورتها ....

(أ) ٢π (ب) π (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) $\frac{\pi}{4}$

$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

(٤) الشكل المقابل يمثل ص = د(س) فإن

(أ) ص = ٢ جا س (ب) ص = جا ٢س (ج) ص = ٢ جا ٢س (د) ص = جا س

المنحنى يمر بنقطة الأصل جا(٠) = ٠

مداها [-٢ ، ٢] دورتها π ، $\frac{2\pi}{2} = \pi$

(٥) الشكل المقابل

(أ) ص = جا θ (ب) ص = جتا θ (ج) ص = ٢ جتا θ (د) ص = ٢ جا θ

(٦) الدالة ص = جا($\frac{\pi}{4}$ + س) تبلغ أقصى قيمة لها عند س = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) $-\frac{\pi}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) صفر

أقصى قيمة لـ جا ٩٠ = ١ ∴ س = ٤٥ = $\frac{\pi}{4}$

(٧) إذا كانت د(س) = أ جتا ب س حيث أ > ٠ دورتها $\frac{\pi}{2}$ ومداها [-١ ، ١] فإن $\frac{أ}{ب}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{4}$ (ج) $-\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{4}$

أ = ١ ، $\frac{2\pi}{ب} = \frac{\pi}{2}$ ∴ ب = ٤ ∴ $\frac{أ}{ب} = \frac{1}{4}$

(٨) عدد مرات تقاطع المنحنى ص = جا ٣س مع محور السينات في [٠ ، ٢π] يساوي ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٧

دورتها $\frac{2\pi}{3}$ = ١٢٠ يتقاطع فيها مرتين ، $\frac{360}{120}$ = ٣

٣ × ٢ = ٦ + ١ عند الصفر = ٧

وهي عند ٠ ، ٦٠ ، ١٢٠ ، ١٨٠ ، ٢٤٠ ، ٣٠٠ ، ٣٦٠

هنيئاً..

لمن بات والناس يدعون له،
وويل لمن نام والناس يدعون عليه،
وبشرى لمن أحبته القلوب،
وخسارة لمن لعنته الألسن..
يارب سخر لنا من عبادك
من يدعون لنا بالخير..

الدرس السادس

إيجاد قياس زاوية بمعلومية احدى نسبها المثلثية

الخطوات

١) تحديد الربع الذى تقع فيه θ حسب الإشارة.

٢) نوجد قياس الزاوية الحادة

shift sin shift cos shift tan

بدون إشارة

٣) ننسب الزاوية للربع الذى تقع فيه

$\theta - 180°$	θ
$\theta + 180°$	$\theta - 360°$

* الأول كما هى
* الثانى $180 - \alpha$
* الثالث $180 + \alpha$
* الرابع $360 - \alpha$

مثال ١ أوجد قيمة θ إذا كان

١) جا $\theta = \frac{1}{2}$

الحل

الإشارة موجبة ∴ الزاوية فى الربع

الأول أو الثانى

نوجد الزاوية الحادة

shift sin $\frac{1}{2} = 30°$

الأول الثانى

$30°$ $180° - 30° = 150°$

∴ $\theta = 30°$ أو $150°$

٢) جتا $\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

الحل

جتاθ سالبة فى الثانى والثالث

shift cos $\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$

الثانى الثالث

$180 - 45 = 135°$ $180 + 45 = 225°$

∴ $\theta = 135°$ أو $225°$

٣) ظا $\theta = -\sqrt{3}$

الحل

ظاθ سالبة فى الثانى والرابع

shift tan $\sqrt{3} = 60°$

الثانى الرابع

$180° - 60° = 120°$ $360 - 60 = 300°$

∴ $\theta = 120°$ أو $300°$

٤) جا $\theta = \frac{-1}{2}$ حيث θ أصغر زاوية موجبة

الحل

جاθ سالبة فى الثالث والرابع

$180 + 30 = 210°$ أو $360 - 30 = 330°$

∵ θ أصغر زاوية موجبة ∴ $\theta = 210°$

مثال ٢ أوجد θ حيث $٠° < \theta < ٣٦٠°$ والتي تحقق جا θ = ٠٫٧٤٢١

الحل

جا θ موجبة في الأول والثاني

$\theta = shift\ sin\ 0.7421 = 47° \ 55'$

في الأول = ٤٧° ٥٥′

في الثاني = ١٨٠ − ٤٧° ٥٥′ = ١٣٢° ٥′

مثال ٣ إذا قطع الضلع النهائي لزاوية موجبة قياسها θ في وضعها القياسي دائرة الوحدة في النقطة ب$(\frac{-٦}{١٠} ، \frac{٨}{١٠})$ فأوجد ق(θ) حيث $٠° < \theta < ٣٦٠°$

الحل

جا $\theta = \frac{٨}{١٠}$ — الأول ، الثاني

جتا $\theta = \frac{-٦}{١٠}$ — الثاني ، الثالث

∴ الزاوية تقع في الربع الثاني

$shift\ sin\ \frac{8}{10} = ٥٣° \ ٧' \ ٤٨''$

∴ θ = ١٨٠° − ٥٣° ٧′ ٤٨″ = ١٢٦° ٥٢′ ١٢″

ثلاثيات فيثاغورث

٣	٤	٥
٦	٨	١٠
٩	١٢	١٥
١٥	٢٠	٢٥
٥	١٢	١٣
٨	١٥	١٧

مثال ٤ أوجد الدوال المثلثية لكل مما يأتي

١) جا $\theta = \frac{-٨}{١٧}$ حيث $٢٧٠° < \theta < ٣٦٠°$

الحل

خليك فاكر إنه انت شغال في الربع الرابع يعني جتا موجبة و(جا وظا) سالبتين

(مثلث: وتر ١٧ ، مقابل ٨ ، مجاور ١٥)

من فيثاغورث ∴ المجاور = $\sqrt{(١٧)^٢ - (٨)^٢} = ١٥$

جا $\theta = \frac{-٨}{١٧}$

جتا $\theta = \frac{١٥}{١٧}$

ظا $\theta = \frac{-٨}{١٥}$

٢) ظا $\beta = \frac{٥}{١٢}$ حيث β أكبر زاوية موجبة ، $٠ < \beta < ٣٦٠°$

الحل

∵ ظا β موجبة ∴ تقع في الأول أو الثالث

∵ β أكبر زاوية موجبة

∴ β في الربع الثالث

(مثلث: وتر ١٣ ، مقابل ٥ ، مجاور ١٢)

من فيثاغورث ∴ الوتر = $\sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢} = ١٣$

∴ جا $\beta = \frac{-٥}{١٣}$

جتا $\beta = \frac{-١٢}{١٣}$

ظا $\beta = \frac{٥}{١٢}$

ونحط الإشارات الربع الثالث

اختر

١) إذا كان ص = جتا θ فإن θ = ...

(أ) جا$^{-1}$ ص (ب) جتا$^{-1}$ ص (ج) ظا$^{-1}$ ص (د) جتا$^{-1}$ θ

٢) إذا كان θ = ظا$^{-1}$ $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ، ٩٠° < θ < ١٨٠°

فإن θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ١٢٠° (ج) ١٥٠° (د) ٢١٠°

٣) إذا كان θ = جا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث θ أصغر زاوية موجبة فإن θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (ج) ٢٤٠° (د) ٣٠٠°

٤) القياس الستيني لأصغر زاوية موجبة تحقق جا$^{-1}$ (-٠,٦) هو ....

(أ) ٥٢َ ٣٦° (ب) ٨َ ١٤٣° (ج) ٥٢َ ٢١٦° (د) ٨َ ٣٢٣°

في الربع الثالث ١٨٠ + جا$^{-1}$ ٠,٦ =

٥) في الشكل المقابل

أ، ب، ج (مثلث قائم في أ، أج = ٣ سم، أب = ٤ سم)

ق(أ ب̂ ج) = ...

(أ) جا$^{-1}$ $\left(\frac{3}{4}\right)$ (ب) جا$^{-1}$ $\left(\frac{4}{3}\right)$ (ج) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{3}{4}\right)$ (د) ظتا$^{-1}$ $\left(\frac{3}{4}\right)$

ظا ب = $\frac{3}{4}$ ∴ ب = ظا$^{-1}$ $\frac{3}{4}$

٦) جا (جتا$^{-1}$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$)) = ...

(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) ٣٠° (د) ٦٠°

جتا$^{-1}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٣٠° ∴ جا ٣٠° = $\frac{1}{2}$

٧) قتا (جتا$^{-1}$ ٠) = ...

(أ) ١ (ب) -١ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) صفر

جتا$^{-1}$ ٠ = ٩٠° قتا ٩٠ = $\frac{1}{جا ٩٠}$ = $\frac{1}{1}$ = ١

٨) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ + ظتا$^{-1}$ $\sqrt{3}$ = ...

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{2}$ (ج) $\frac{3\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{6}$

ظا$^{-1}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ + ظا$^{-1}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠°

٩) جتا$^{-1}$ س + جا$^{-1}$ س = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{2}$ (د) π

ملحوظة هامة

الأس -١ ده معناه الدالة العكسية

بدلاً من sin جا

تعمل shift sin جا$^{-1}$

مثال ٥ إذا كان جا θ = $\frac{٤}{٥}$ حيث ٩٠° < θ < ١٨٠°

فأوجد جا(١٨٠ − θ) + ظا(٣٦٠ − θ) + ٢جا(٢٧٠ − θ)

الحل

(المثلث: الوتر ٥، المقابل ٤، المجاور ٣، θ)

∵ ٩٠° < θ < ١٨٠°

∴ جا θ = $\frac{٤}{٥}$

جتا θ = $\frac{-٣}{٥}$ لأنها في الربع الثاني

ظا θ = $\frac{-٤}{٣}$

المقدار جا(١٨٠ − θ) = جا θ

ظا(٣٦٠ − θ) = − ظا θ

٢جا(٢٧٠ − θ) = − ٢جتا θ

= جا θ − ظا θ − ٢جتا θ

= $\frac{٤}{٥}$ − ($\frac{-٤}{٣}$) − ($٢ \times \frac{-٣}{٥}$) = ٣ $\frac{١}{٣}$

مثال ٦ إذا كان ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ حيث ١٨٠° < θ < ٢٧٠°

فأوجد قيمة جتا(٣٦٠° − θ) − جتا(٩٠° − θ)

الحل

(المثلث: الوتر ٥، المقابل ٣، المجاور ٤، θ)

جا θ = $\frac{-٣}{٥}$ في الربع الثالث

جتا θ = $\frac{-٤}{٥}$

ظا θ = $\frac{٣}{٤}$

جتا(٣٦٠ − θ) = جتا θ

جتا(٩٠ − θ) = جا θ

= جتا θ − جا θ = $\frac{-٤}{٥}$ − ($\frac{-٣}{٥}$) = $\frac{-١}{٥}$

١ أوجد قيمة θ حيث θ ∈]٠، ٢π[

(١) جا θ = $\frac{١}{٢}$ (٢) جتا θ = $\frac{-١}{٢}$

(٣) ظا θ = −√٣   (٤) ظتا θ = √٣

---

٢ أوجد قياس أصغر زاوية موجبة تحقق

(١) جتا θ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (٢) ظا θ = ١

(٣) جا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٤) جتا θ = ٠.٧

---

٣ إذا قطع الضلع النهائي فأوجد قيمة θ ∈ [٠، ٢π[

(١) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)   (٢) ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$)

(٣) ($\frac{-٨}{١٠}$ ، $\frac{٦}{١٠}$)

---

٤ إذا كان ٧ قتا θ = ٢٥ حيث $\frac{\pi}{٢}$ < θ < π فأوجد القيمة العددية للمقدار

ظا(π + θ) − ظتا(θ − $\frac{\pi}{٢}$)

(٩٠ − θ) = (θ + ٢٧٠)

انتهى الجبر وحساب المثلثات

مع أطيب تمنياتي للطلبة بالنجاح والتفوق

محمد أدهم

الأدهم
فى
الهندسة
الصف الأول الثانوى
الترم الاول
٢٠٢٠
هدية
مجانية
إعداد
أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

الدرس الأول : تشابه المضلعات

علاقة التشابه ∽

علاقة التطابق ≡

يتشابه المضلعان إذا

١) تساوت قياسات زواياهما المتناظرة

٢) تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة

ولا بد من تحقق الشرطين معًا

ملاحظات

١) تكتب المضلعات المتشابهات بنفس ترتيب الرؤوس المتناظرة

مثلا إذا كان أ ب جـ د ∽ س ص ع ل

فإن ق(∠أ) = ق(∠س)

، ق(∠جـ) = ق(∠ع)

، $\frac{أب}{س ص} = \frac{ب جـ}{ص ع} = \frac{جـ د}{ع ل} = \frac{د أ}{ل س} =$ ك

٢) يسمى معامل التشابه ك

إذا كان ك > ١

فإن المضلع الأول تكبير للثاني

أو الثاني تصغير للأول

٣) وإذا كان ٠ < ك < ١

فإن الأول تصغير للثاني

أو الثاني تكبير للأول

٤) وإذا كان ك = ١

فإن المضلعان متطابقان

٥) المضلعات المتطابقة هما مضلعان متشابهان ومعامل التشابه = ١

٦) كل مضلعين متطابقين فهما متشابهين وليس كل مضلعين متشابهين يكونان متطابقان

٧) المضلعات المتشابهة لثالث متشابهة

٨) كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة

مثلا

كل المربعات متشابهة

كل المثلثات متساوية الأضلاع متشابهة

كل الخماسي المنتظم متشابه

وهكذا

٩) إذا كان معامل التشابه (١) فإن المضلعان يكونان متطابقان

١٠) النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما

مثال ١

المضلع أ ب جـ د ~ المضلع هـ و ز ح

أوجد

١) معامل تشابه أ ب جـ د للمضلع هـ و ز ح

٢) قيمة كلاً من س، ص

الحل

أ ب جـ د ~ هـ و ز ح

$\frac{\text{أب}}{\text{هـو}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ز}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ز ح}} = \frac{\text{د أ}}{\text{ح هـ}}$

$\frac{\text{ص}+٢}{٦} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{و ز}} = \frac{١٥}{\text{س}} = \frac{١٢}{٨} = \text{ك}$

∴ $\text{ك} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$

∵ $\frac{١٥}{\text{س}} = \frac{١٢}{٨}$

∴ $\text{س} = \frac{٨ \times ١٥}{١٢} = ١٠$ سم

، ∵ $\frac{\text{ص}+٢}{٦} = \frac{١٢}{٨}$

∴ $(\text{ص}+٢) = \frac{١٢ \times ٦}{٨}$

ص + ٢ = ٩ ∴ ص = ٩ − ٢

∴ ص = ٧ سم

مثال ٢

من الشكل المقابل

Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

محيط المثلث أ ب جـ = ٨١ سم

أوجد أطوال أضلاع Δ أ ب جـ

الحل

∵ محيط Δ أ ب جـ = ٨١ سم

، محيط Δ (د هـ و) = (٨ + ٩ + ١٠) = ٢٧ سم

∴ $\frac{\text{محيط أ ب جـ}}{\text{محيط د هـ و}} = \frac{٨١}{٢٧} = ٣$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}} = ٣$

$\frac{\text{أ ب}}{٨} = \frac{\text{ب جـ}}{٩} = \frac{\text{أ جـ}}{١٠} = ٣$

∴ أ ب = ٣ × ٨ = ٢٤ سم

ب ج = ٣ × ٩ = **٢٧ سم**

ا ج = ٣ × ١٠ = **٣٠ سم**

مثال ٣

المضلع ا ب ج د ~ المضلع س ص ع ل

فإذا كان ا ب = ٣٢ سم

، ب ج = ٤٠ سم ، س ص = ٣م - ١

، ص ع = ٣م + ١ فأوجد قيمة م العددية

الحل

∵ ا ب ج د ~ س ص ع ل

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ص ع}}$$

$$\frac{٣٢}{٣م - ١} = \frac{٤٠}{٣م + ١}$$

٣٢(٣م + ١) = ٤٠(٣م - ١)

٩٦م + ٣٢ = ١٢٠م - ٤٠

٩٦م - ١٢٠م = - ٤٠ - ٣٢

-٢٤م = - ٧٢

∴ م = $\frac{-٧٢}{-٢٤}$ = **٣**

مستطيل بعداه ١٠ سم ، ٦ سم

أوجد محيط ومساحة مستطيل

آخر إذا كان معامل التشابه = ٣

الحل

∵ معامل التشابه = ٣ > ١

∴ المستطيل المطلوب تكبير للمعطى

∴ $\frac{\text{طول الأول}}{١٠} = \frac{\text{عرض الأول}}{٦} = ٣$

∴ طول المستطيل = ٣ × ١٠ = **٣٠ سم**

وعرض المستطيل = ٣ × ٦ = **١٨ سم**

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

= ٢ × (٣٠ + ١٨) = **٩٦ سم**

مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ٣٠ × ١٨ = **٥٤٠ سم²**

مثال ٥

ا ب ج مثلث فيه ا ب = ٤ سم

، ب ج = ٥ سم ، ا ج = ٨ سم

أوجد أطوال أضلاع مثلث آخر مشابه له

إذا كان معامل التشابه = ٠.٧

الحل

∵ معامل التشابه ك = ٠.٧ < ١

∴ المثلث المطلوب تصغير للمثلث ا ب ج

نفرض أن △ س ص ع ~ △ ا ب ج

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{س ع}}{\text{ا ج}} = ٠.٧$

∴ $\frac{س ص}{٤} = \frac{ص ع}{٥} = \frac{س ع}{٨} = ٧و٠$

∴ س ص = ٤ × ٧و٠ = **٢و٨ سم**

، ص ع = ٥ × ٧و٠ = **٣و٥ سم**

، س ع = ٨ × ٧و٠ = **٦و٥ سم**

اختر

(١) لكي يتشابه المضلعان م١ ، م٢ يكون كافياً الحصول على ----

(أ) زواياهما المتناظرة متساوية في القياس فقط.

(ب) أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة فقط.

(ج) (أ) ، (ب) معاً.

(د) مفيش حاجة من اللي فات

(٢) لكي يتشابه المعينان أ ب ج د ، س ص ع ل يكون كافياً الحصول على ----

(أ) ق(أ) = ٦٠° ، ق(ص) = ١٢٠° فقط

(ب) محيط المعين أ ب ج د = ٢ محيط المعين س ص ع ل

(ج) (أ) ، (ب) معاً

(د) الاجابة تونس

(٣) في الشكل المقابل

المستطيل أ ب ج د ~ س ب ص ل

فإن طول ص ج = ---- سم

∵ $\frac{س ب}{د ج} = \frac{ب ص}{أ د}$ ، $\frac{٢}{٦} = \frac{ب ج}{١٢}$

∴ ب ج = $\frac{٢ \times ١٢}{٦}$ = ٤سم ∴ ص ج = ٨سم

(٤) في الشكل المقابل

△ أ ب ج ~ △ أ هـ د

وكان ق(ب) = ٣س + ١٠°

، ق(أ هـ د) = س + ٣٠°

فإن ق(أ) = ----°

(أ) ٥٠° (ب) ٤٠° (ج) ٣٠° (د) ٦٠°

من لوازم التشابه ق(ب) = ق(أ هـ د)

∴ ٣س + ١٠ = س + ٣٠

٢س = ٢٠ ∴ س = ١٠°

∴ ق(ب) = ٤٠° ∴ ق(أ) = ٥٠°

(٥)

إذا كان △ أ ب ج ~ △ د هـ و

فإن طول و هـ = ---- سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

فيه أكثر من حل

△ أ ب ج قياسات زواياه تدل انه قائم في أ

وفيه ق(ج) = ٣٠° ∴ الضلع المقابل لها نصف الوتر

وفي △ د هـ و ∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ هـ و

∴ هـ و = ٦سم

١ أكمل

١) يتشابه المضلعان إذا ...... ، ......
٢) كل المضلعات المتطابقة تكون ......
٣) المضلعان المتشابهان لثالث ......
٤) إذا كان معامل التشابه ١ كان المضلعان ......
٥) مضلعان متشابهان النسبة بين ضلعين ٠٫٣ فإن النسبة بين محيطيهما ......
٦) كل المربعات تكون ......
٧) المضلعات المنتظمة التى لها نفس العدد من الأضلاع تكون ......
٨) النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين = النسبة بين ......

٢ $أ ب جـ د \sim س ص ع ل$

باستخدام الأطوال المبينة على الرسم أوجد طول $\overline{س ص}$ ، $\overline{ص ع}$ ، $\overline{ع ل}$

٣ من الشكل المقابل

$ق(\hat{أ}) = ١١٥°$

احسب ق(س ل ع) وطول د ع
وإذا كان محيط المضلع أ ب جـ د = ١٩٫٥سم
احسب محيط المضلع س ص ع ل

٤ △ أ ب جـ فيه أ ب = ٥سم ، ب جـ = ٦سم ، أ جـ = ٩سم أوجد أطوال أضلاع مثلث مشابه له إذا كان معامل التشابه = ٢

٥ مستطيلان متشابهان بعدا الأول ٣٨سم ، ١٢سم ، ومحيط الثانى = ٢٠٠سم أوجد بعدا المستطيل الثانى ومساحته

٦ إذا كان أ ب جـ د ~ س ص ع ل أكمل

١) $\frac{أ ب}{ب جـ} = \frac{......}{ص ع}$
٢) أ ب × ع ل = س ص × ......
٣) ق($\hat{ب}$) = ق(......)
٤) $\frac{محيط ......}{محيط ......} = \frac{س ص}{أ ب}$

الدرس الثانى : تشابه المثلثات

فى الدرس ده هندرس حالة واحدة فقط

الحالة الأولى : زاويتان

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان من احدهما مع نظائرهما فى المثلث الآخر

ملاحظات

١ فى المثلث القائم
محتاجين زاوية حادة

٢ فى المثلث المتساوى الساقين
محتاجين زاوية حادة مع زاوية قاعدة
أو زاوية الرأس مع زاوية الرأس

٣ فى المثلث المتساوى الأضلاع
متحاجين سلامتك بس
لأنهم متشابهان فاكر ملاحظات الدرس اللى فات

مسائل الفكرة الأولى

مثال ١ فى الشكل المقابل

△ أ ب جـ فيه

أد = $\frac{1}{2}$ أب = ٦سم

، ب د = ٩سم

، هـ ب = ٥سم

، هـ و // ب جـ

١ اثبت أن △ أهـو ~ △ أبجـ

٢ أوجد طول هـو ، د و

الحل

△△ أهـو ، أبجـ فيهما

ق($\hat{أهـو}$) = ق($\hat{ب}$) بالتناظر

ق($\hat{أوهـ}$) = ق($\hat{جـ}$) بالتناظر

ق($\hat{أ}$) مشتركة

∴ △ أهـو ~ △ أبجـ # أولاً

∵ أد = ٦سم ، $\frac{1}{2}$ أب = ٦سم

∴ أب = ١٢سم ، ∵ ب هـ = ٥سم

∴ أهـ = ٧سم

من التشابه $\frac{أهـ}{أب} = \frac{هـو}{بجـ} = \frac{أو}{أد}$

$\frac{أو}{٦} = \frac{هـو}{٩} = \frac{٧}{١٢}$

∴ هـو $= \frac{٩ \times ٧}{١٢} =$ ٥,٢٥ سم

، أو $= \frac{٦ \times ٧}{١٢} =$ ٣,٥ سم

، ∵ أهـ = ٦ سم ، أو = ٣,٥ سم

∴ أو = ٦ − ٣,٥ = ٢,٥ سم

مثال ٢

في الشكل المقابل

ق(∠أهـد) = ق(∠أبج)

١) اثبت أن △ أبج ~ △ أهـد

٢) أوجد طول $\overline{بج}$ ، $\overline{هـج}$

الحل

△△ أبج ، أهـد فيهما

ق(∠أبج) = ق(∠أهـد)

(∠أ) زاوية مشتركة

∴ △ أبج ~ △ أهـد

∴ $\frac{أب}{أهـ} = \frac{بج}{هـد} = \frac{أج}{أد}$

$\frac{٢٠}{١٠} = \frac{بج}{٩} = \frac{أج}{٨}$

∴ بج $= \frac{٢٠ \times ٩}{١٠} =$ ١٨ سم

، أج $= \frac{٢٠ \times ٨}{١٠} =$ ١٦ سم

∴ جهـ = ١٦ − ١٠ = ٦ سم

الفكرة الثانية

نتيجة (١)

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

△ أدهـ ~ △ أبج

مثال ٣

في الشكل المقابل

أ
٤ سم
د هـ
(٤س − ٥) سم
٢ سم
ب ج
(س + ٥) سم

اثبت أن

△ أبج ~ △ أدهـ

ثم أوجد قيمة س

الحل

△△ أدهـ ، أبج فيهما

ق(∠أدهـ) = ق(∠ب) بالتناظر

ق(∠أهـد) = ق(∠ج) بالتناظر

(∠أ) مشتركة

∴ △ أ د هـ ∼ △ أ ب جـ

∴ $\frac{أد}{أب} = \frac{د هـ}{ب جـ}$

∴ $\frac{٤}{٦} = \frac{٤س - ٥}{س + ٥}$

$٤(س + ٥) = ٦(٤س - ٥)$

$٤س + ٢٠ = ٢٤س - ٣٠$

$٤س - ٢٤س = -٣٠ - ٢٠$

$-٢٠س = -٥٠$

∴ $س = \frac{-٥٠}{-٢٠} = ٢,٥$

مثال ٤

في الشكل المقابل

اثبت ان △ أ د هـ ∼ △ أ ب جـ

ثم اوجد قيمة س

الحل

△△ أ د هـ ، أ ب جـ فيهما

ق(د̂) = ق(ب̂) بالتبادل

ق(هـ̂) = ق(جـ̂) بالتبادل

∴ △ أ د هـ ∼ △ أ ب جـ

$\frac{أد}{أب} = \frac{د هـ}{ب جـ} = \frac{أ هـ}{أ جـ}$

$\frac{س + ٤}{٢س + ٣} = \frac{٣}{٥}$

$٥(س + ٤) = ٣(٢س + ٣)$

$٥س + ٢٠ = ٦س + ٩$

$٥س - ٦س = ٩ - ٢٠$

$-س = -١١$

∴ $س = ١١$

فاكر إقليدس

إذا رسم من رأس المثلث القائم عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.

في الشكل المقابل

△ د ب أ ∼ △ د أ جـ ∼ △ أ ب جـ

ومنها

* $(أب)^٢ = ب د × ب جـ$ * $(أجـ)^٢ = جـ د × جـ ب$
* $(أد)^٢ = د ب × د جـ$ * $أد × جـ ب = أ ب × أ جـ$

مثال ٥ في الشكل المقابل

أوجد طول $\overline{أد}$ ، $\overline{دجـ}$

الحل

∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ
وفيه $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$

∴ △ د ب أ ~ △ د أ جـ

∴ $\frac{دب}{أد} = \frac{أب}{أجـ} = \frac{أد}{دجـ}$

$\frac{٩}{أد} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{أد}{دجـ}$

∴ أد = $\frac{٢٠ \times ٩}{١٥}$ = ١٢ سم

دجـ = $\frac{١٢ \times ٢٠}{١٥}$ = ١٦ سم

تدريب

أوجد قيمة س العددية

مثال ٦ أوجد قيمة س

الحل

∵ △ د جـ ب قائم الزاوية في جـ وفيه $\overline{جـ هـ} \perp \overline{ب د}$

∴ △ هـ د جـ ~ △ هـ جـ ب

∴ $\frac{هـ د}{هـ جـ} = \frac{هـ جـ}{هـ ب}$ ∴ $(هـ جـ)^2$ = هـ د × هـ ب

∴ $(٦)^2$ = ٤ × (٢س + ١)

٣٦ = ٨س + ٤

∴ ٨س = ٣٢ ∴ س = ٤

مثال ٧ △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، رسم $\overrightarrow{أد} \perp \overline{ب جـ}$ يقطعه في د

وإذا كان $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{١}{٢}$

، أد = $٦\sqrt{٢}$ سم

فأوجد طول $\overline{ب د}$ ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$

الحل

∵ $\frac{ب د}{د جـ} = \frac{١}{٢}$

نفرض أن ب د = س سم ، د جـ = ٢س سم

∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ وفيه $\overline{أد} \perp \overline{ب جـ}$ ∴ △ د ب أ ~ △ د أ جـ

∴ $(أد)^2$ = ب د × د جـ

∴ $(٦\sqrt{٢})^2$ = س × ٢س

∴ ٢س² = ٧٢

∴ س² = $\frac{٧٢}{٢}$ = ٣٦

∴ س = $\sqrt{٧٢}$ = ٦ $\sqrt{٢}$

∴ ب د = ٦ $\sqrt{٢}$ ، د جـ = ١٢ $\sqrt{٢}$

∴ ب جـ = ١٨ $\sqrt{٢}$

∵ (أ ب)^{٢} = ب د × ب هـ = ٦ × ١٨

∴ أ ب = ٦ $\sqrt{٣}$. $\sqrt{٢}$

، ∵ (أ جـ)^{٢} = جـ د × جـ ب = ١٢ × ١٨

∴ أ جـ = ٦ $\sqrt{٦}$

---

١ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون قائمة

٢ قياس الزاوية المحيطية = $\frac{١}{٢}$ قياس المركزية

٣ قياس الزاوية المماسية = قياس المحيطية المرسومة معها على نفس القوس

٤ المماس للدائرة يكون عمودى على نصف القطر من نقطة التماس

٥ الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس أو أقواس متساوية تكون متساوية فى القياس

---

٦ فى الشكل الرباعى الدائرى

* كل زاويتين متقابلتين متكاملتين
* قياس الزاوية الخارجية عند أى رأس = قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس.

مثال ٨ أهـ ، بـجـ وتران فى دائرة متقاطعان فى د حيث د منتصف بـجـ أثبت أن (ب د)^{٢} = أ د × د هـ

الحل

العمل نرسم أجـ ، ب هـ

البرهان

△△ أ د جـ ، ب د هـ

فيهما { ق(∠أ) = ق(∠ب) محيطيتان على نفس القوس ، ق(∠أ د جـ) = ق(∠ب د هـ) بالتقابل بالرأس }

∴ △ أ د جـ ~ △ ب د هـ

وينتج أن $\frac{أ د}{د ب} = \frac{د جـ}{ب هـ}$

∴ د ب × د جـ = أ د × ب هـ

، ∵ ب د = د جـ

∴ ب د × ب د = أ د × ب هـ

(ب د)^{٢} = أ د × ب هـ #

مثال (٩)

فى △ أ ب جـ : أ جـ > أ ب ، م ∈ أ جـ

حيث ق (∠ أ ب م) = ق (∠ جـ)

اثبت أن (أ ب)² = أ م × أ جـ

الحل

△△ أ ب م ، أ جـ ب

فيهما { (∠ أ) مشترك ، ق(∠ أ ب م) = ق (∠ جـ)

∴ △ أ ب م ~ △ أ جـ ب

∴ أ ب / أ جـ = ب م / جـ ب = أ م / أ ب

∴ (أ ب)² = أ م × أ جـ #

مثال (١٠)

فى الشكل المقابل:

△ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ

، أ د ⊥ ب جـ ، د هـ ⊥ أ ب

، د و ⊥ أ جـ

اثبت أن

(أ) △ أ د هـ ~ △ جـ د و

(ب) مساحة المستطيل أ هـ د و = $\sqrt{}$ أ هـ × هـ ب × أ و × و جـ

الحل

∵ (∠ جـ) تتمم (∠ د أ جـ) فى △ أ د جـ

، (∠ هـ أ د) تتمم تتمم (∠ د أ جـ) لأنهما قائمة

∴ ق (∠ جـ) = ق (∠ هـ أ د) ← (١)

، ق (∠ د هـ أ) = ق (∠ د و جـ) = ٩٠° ← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ △ أ د هـ ~ △ جـ د و # أولاً

∵ (د هـ)² = أ هـ × هـ ب

∴ د هـ = $\sqrt{}$ أ هـ × هـ ب

، ∵ (د و)² = أ و × و جـ

∴ د و = $\sqrt{}$ أ و × و جـ

∴ مساحة المستطيل أ هـ د و = د هـ × د و

= $\sqrt{}$ أ هـ × هـ ب × أ و × و جـ # ثانياً

مثال (١١)

△ أ ب جـ منفرج الزاوية فى أ ، أ ب = أ جـ

، رسم أ د ⊥ أ ب وتقطع ب جـ فى د

اثبت أن ٢(أ ب)² = ب د × ب جـ

الحل

العمل: نرسم أ هـ ⊥ ب جـ

البرهان: ∵ أ ب = أ جـ ، أ هـ ⊥ ب جـ

∴ ب هـ = ½ ب جـ ← (٢)

∵ $(أب)^2 =$ ب هـ × ب د ← ②

∴ من ① ، ②

∴ $(أب)^2 = \frac{1}{2}$ ب جـ × ب د

∴ $2(أب)^2 =$ ب جـ × ب د # .

مثال (١٢)

أب ، دجـ وتران في دائرة ، أب ∩ جـد = {هـ}
حيث هـ خارج الدائرة ، أب = ٤سم
، دجـ = ٧سم ، ب هـ = ٦
اثبت أن △ أ د هـ ~ △ جـ ب هـ
ثم أوجد طول جـ هـ

الحل

∵ (أ^) ، (جـ^) تحصران نفس القوس (ب د)

∴ ق(أ^) = ق(جـ^)

، ∵ (هـ^) مشترك

∴ △ أ د هـ ~ △ جـ ب هـ # أولاً .

∴ $\frac{د هـ}{ب هـ} = \frac{أ هـ}{جـ هـ}$ ∴ $\frac{د هـ}{6} = \frac{10}{7 + د هـ}$

∴ $7\,د هـ + (د هـ)^2 = 60$

$(د هـ)^2 + 7\,د هـ - 60 = 0$

$(د هـ + 12)(د هـ - 5) = 0$

د هـ = −١٢ مرفوض ∴ د هـ = ٥سم

∴ جـ هـ = ١٢سم # ثانياً .

---

(١٣) في الشكل المقابل
إذا كان $\frac{س - ص}{س + ص} = \frac{2}{7}$
فإن أهـ = ... سم

(أ) ١٦ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (د) ١٠

∵ $\frac{س}{ص} = \frac{جـ أ}{أ هـ}$ ∴ س = ل(أهـ + ٨) ، ص = ل أهـ

∴ $\frac{ل(أهـ+8) - ل\,أهـ}{ل(أهـ+8) + ل\,أهـ} = \frac{2}{7}$ ∴ $\frac{8}{2\,أهـ + 8} = \frac{2}{7}$

٤ أهـ + ١٦ = ٥٦ ، ٤ أهـ = ٤٠ ، أهـ = ١٠سم

---

(١٤) في الشكل المقابل
أجـ = ١٨سم إذا كان
م نقطة تلاقي
المتوسطات △ أب جـ
فإن طول وم = ...سم

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

∵ د هـ = $\frac{1}{2}$ أجـ = ٩سم (قطعة مرسومة بين منتصفي ضلعين)

∵ م نقطة تلاقي المتوسطات

∴ $\frac{أم}{أد} = \frac{2}{3}$ ∴ $\frac{وم}{هـ د} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{وم}{9} = \frac{2}{3}$ ∴ وم = ٦سم

الادهم فى الرياضيات
١٣
١ث هندسة ترم ١
الواجب
١
أ) اثبت أن △ أ د هـ ~ △ أ ب جـ
ب) أوجد طول أ د ، ب جـ
أ
٣سم
هـ
د
٦سم
ب
جـ
٢
اثبت أن
أ) △ أ د هـ ~ △ أ جـ ب
ب) أوجد طول د ب ، ب جـ
أ
٤سم
٥سم
هـ
د
٦سم
٧سم
ب
جـ
٣
أكمل
س
ص
ل
ع
△ ل س ص ~ △ ... ~ △ ...
(س ص)² = ... × ...
(س ع)² = ... × ...
(س ل)² = ... × ...
س ل × ص ع = ... × ...
٤
أوجد قيمة س
أ
س سم
١٢سم
هـ
د
٩سم
ب
جـ
١٥سم
٥
أوجد قيمة س ، ص ، ع
أ
س
ص
ع
ب
د
جـ
٩سم
١٦سم
٦
اثبت أن △ أ ب جـ ~ △ أ د هـ
ثم أوجد قيمة س
س+٤
٦سم
(٢س+٣)سم
٣سم
أ
ب
جـ
د
هـ
٧
أ ب ، د هـ وتران فى دائرة ،
أ ب ∩ د هـ = {هـ} حيث هـ
خارج الدائرة ، أ ب = ٤سم ، د هـ = ٧سم
ب هـ = ٦سم
اثبت أن △ أ د هـ ~ △ جـ ب هـ ثم أوجد طول جـ هـ
٨
أ ب جـ د مستطيل رسم د و ⊥ أ جـ
فقطعه فى هـ ، ب جـ فى و
اثبت أن مساحة المستطيل أ ب جـ د =
√(أ هـ × أ جـ × د هـ × د و)
٩
أ) اذكر ثلاث أزواج من المثلثات المتشابهة
ب) اثبت أن
د س / ب ص = س هـ / ص جـ = د هـ / ب جـ
أ
هـ
س
د
جـ
ص
ب
٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧
أ/ محمد أدهم

الدرس الثالث : تابع تشابه المثلثات

هندرس الحالتين الباقيين

الحالة الثانية

تناسب الأضلاع الثلاثة

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما

م

إزاى اعرف اكتب المثلثين المتشابهين

امشى من الضلع الأصغر للأوسط للأكبر في المثلث الأول والثاني بنفس ترتيب الدروس.

مثال ١

في الشكل المقابل اثبت أن

المثلثين المظللين متشابهان

$\overrightarrow{بء}$ ينصف $\hat{أبهـ}$

الحل

رتب اضلاع المثلثات تصاعدياً وانت ترتاح

$\frac{أب}{به} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$ ، $\frac{أء}{هء} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

$\frac{بجـ}{بء} = \frac{١٦}{١٢} = \frac{٤}{٣}$

$\therefore \frac{أب}{به} = \frac{بجـ}{بء} = \frac{أجـ}{ءهـ}$

$\therefore$ △ أبجـ ∼ △ ءبهـ # أولاً

وينتج من التشابه أن ق($\hat{أبجـ}$) = ق($\hat{هبء}$)

$\therefore \overrightarrow{بء}$ ينصف ($\hat{أبهـ}$) # ثانياً.

مثال ٢

في الشكل المقابل اثبت أن

١) المثلثين متشابهان

٢) $\overrightarrow{جـأ}$ ينصف ($\hat{بجـء}$)

الحل

$\frac{أب}{أء} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{أجـ}{ءجـ} = \frac{١٨}{١٢} = \frac{٣}{٢}$

$\frac{بجـ}{أجـ} = \frac{٢٧}{١٨} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore \frac{بأ}{أء} = \frac{أجـ}{ءجـ} = \frac{بجـ}{جـأ} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore$ △ بأجـ ∼ △ أءجـ # أولاً

وينتج أن ق($\hat{أجـب}$) = ق($\hat{ءجـأ}$)

$\therefore \overrightarrow{جـأ}$ ينصف ($\hat{بجـء}$) # ثانياً

الحالة الثالثة

زاوية وضلعيه بنوعيها

يتشابه المثلثان إذا طابقت زاوية نظيرتها فى المثلث الآخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التى تحتويها هاتان الزاويتان

مثال ٣

فى الشكل المقابل

① اثبت أن △ أ ب جـ ~ △ د هـ جـ

② أوجد طول د هـ

③ اثبت أن الشكل أ ب د هـ رباعى دائرى

الحل

∵ $\frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ هـ}} = \frac{10}{5} = 2$

، $\frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ د}} = \frac{8}{4} = 2$

∵ △△ أ ب جـ ، د هـ جـ

فيهما { (جـ^) مشتركة ، $\frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ هـ}} = \frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ د}} = 2$ }

∴ △ أ ب جـ ~ △ د هـ جـ #

وينتج أن

$\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ جـ}}$

$\frac{7}{\text{د هـ}} = \frac{10}{5}$

∴ د هـ = $\frac{7 \times 5}{10}$ = ٣,٥ سم ثانياً

∵ △ أ ب جـ ~ △ د هـ جـ

∴ ق (جـ هـ د^) = ق (ب^)

، ∵ (جـ هـ د^) خارجة عن الشكل الرباعى = الداخلة المقابلة للمجاورة لها

∴ الشكل أ ب د هـ رباعى دائرى.

مثال ٤

فى الشكل المقابل

اثبت أن

① △ أ ب جـ ~ △ أ د ب

② أ ب مماس للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، د

الحل

△△ أ ب جـ ، أ د ب

فيهما { (أ^) مشتركة ← ①

$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ د}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ← ② }

∴ △ أ ب جـ ~ △ أ د ب # أولاً

ومن التشابه ينتج أن ق (أ ب جـ^) = ق (د^)

∴ أ ب مماس للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، د # ثانياً.

اختر

(١) دب = ... سم

أ) ١٢ ب) ١٦ جـ) ١٨ د) ٢٠

تشابه زاوية وضلعين

$\frac{ب جـ}{جـ د} = \frac{أ ب}{أ جـ}$ ∴ $\frac{أب}{١٢} = \frac{٨}{٦}$ ∴ أب = ١٦

---

(٢) في الشكل المقابل ب منتصف جـ هـ فإن د هـ = ... سم

أ) ٤ ب) ٥ جـ) ٦ د) ٧

جـ هـ = ١٢سم $\frac{جـ هـ}{جـ ب} = \frac{جـ د}{جـ أ} = \frac{٢}{١} = \frac{هـ د}{٢,٥}$

∴ هـ د = ٥سم

---

(٣) في الشكل المقابل لإثبات أن △أ ب جـ ~ △هـ و د يكون كافياً الحصول على

أ) د و // ب جـ فقط.

ب) د، هـ، و منتصفات أب، ب جـ، أجـ على الترتيب فقط.

جـ) أ، ب معاً.

د) ولا حاجة لأي

---

(٤) ص جـ = ... سم

أ) ٩ ب) ١٠ جـ) ١١ د) ١٢

نلاحظ أن أضلاع △ هـ د ب تتناسب مع س ص أ

∵ △ هـ د ب ~ △ س ص أ

∴ ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{ب}$)

في △ أ ب جـ الذي يكون متساوي الساقين

∴ أ جـ = ب جـ = ٢٠ سم

∴ ص جـ = ٢٠ − ٩ = ١١ سم

(ياعبادي إنكم تخطئون في الليل و النهار وأنا أغفر الذنوب جميعاً فاستغفروني أغفر لكم) صحيح مسلم

استغفر الله العظيم

مثال ٥

أ ب جـ د شكل رباعي ، هـ ∈ $\overline{أجـ}$ بحيث $\frac{أجـ}{أد} = \frac{أهـ}{بهـ}$ ، $\frac{أب}{أهـ} = \frac{جـد}{أجـ}$

اثبت أن

١) $\overline{جـد} \parallel \overline{أب}$

٢) $\overline{أد} \parallel \overline{بهـ}$

الحل

(١) ∵ $\frac{أجـ}{أد} = \frac{أهـ}{بهـ}$ ∴ $\frac{أد}{بهـ} = \frac{أجـ}{أهـ}$

انت فاكر ان من خواص التناسب

لما مقدم على مقدم = تالي على تالي صح؟

(٢) ، ∵ $\frac{أب}{أهـ} = \frac{جـد}{أجـ}$ ∴ $\frac{أجـ}{أهـ} = \frac{جـد}{أب}$

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\frac{أجـ}{أهـ} = \frac{أد}{بهـ} = \frac{جـد}{أب}$

∴ Δ د جـ أ ~ Δ ب أ هـ

وينتج أن ق(∠أجـد) = ق(∠هـأب) وهما في وضع تبادل ∴ $\overline{جـد} \parallel \overline{أب}$ أولاً

، ق(∠هـأد) = ق(∠أهـب) وهما متبادلتان ∴ $\overline{أد} \parallel \overline{بهـ}$ ثانياً

الواجب

١) في الشكل المقابل

اثبت أن

أ) Δ أ ب جـ ~ Δ د ب أ

ب) $\overrightarrow{ب أ}$ ينصف (∠د ب جـ)

٢) اثبت أن

أ) Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

ب) الشكل د هـ جـ ب رباعي دائري

٣) إذا كان $\frac{أب}{دأ} = \frac{جـهـ}{بهـ}$ ، $\frac{بد}{أد} = \frac{هـب}{بجـ}$

اثبت أن

أ) $\overline{أد} \parallel \overline{بجـ}$

ب) $\overline{أب} \parallel \overline{جـهـ}$

٤) Δ أ ب جـ ~ Δ ......

ومعامل التشابه = ...

استراحة

سؤال: النص فيه كام نص؟ الربع فيه كام ربع؟

الدرس الرابع : العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين

نظرية (٣)

النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

الضلعين	المحيط	المساحة

الضلعين ← نفس النسبة → المحيط

الضلعين ← مربع النسبة → المساحة

ملاحظات

١) النسبة بين محيطى مثلثين متشابهين = النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما

٢) النسبة بين مساحتى مثلثين متشابهين تساوى مربع النسبة بين طولى متوسطين متناظرين فيهما.

٣) النسبة بين مساحتى مثلثين مشتركين فى القاعدة = النسبة بين ارتفاعيهما

٤) النسبة بين مساحتى مثلثين مشتركين فى الارتفاع تساوى النسبة بين طولى قاعدتيهما

٥) النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين = مربع النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما

الفكرة الأولى

مثال: أكمل

١) إذا كانت النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فى مضلعين متشابهين = ٢ : ٣ فإن النسبة بين محيطيهما ..٢.. : ..٣..
والنسبة بين مساحتيهما ..٤.. : ..٩..

٢) إذا كانت النسبة بين محيطى مضلعين متشابهين ٣ : ٤ فإن النسبة بين مساحتيهما ٩ : ١٦

٣) إذا كانت النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين ٤ : ٢٥ فإن النسبة بين محيطيهما = ..٢ : ٥..

٤) إذا كانت النسبة بين مساحتى مضلعين متشابهين ٣ : ٤ فإن النسبة بين محيطيهما = $\sqrt{3}$: ٢

مثال 2 إذا كان المضلع أ ب جـ د ~ المضلع أَ بَ جـَ دَ ، $\frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}} = \frac{1}{3}$

فإن $\frac{\text{م (المضلع أ ب جـ د)}}{\text{م (المضلع أَ بَ جـَ دَ)}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$\frac{\text{محيط المضلع أ ب جـ د}}{\text{محيط المضلع أَ بَ جـَ دَ}} = \frac{1}{3}$

مثال 3 إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما 12 سم ، 16 سم وكانت مساحة المضلع الأصغر = 135 سم² فأوجد مساحة المضلع الأكبر

الحل

∵ $\frac{\text{م (المضلع الأصغر)}}{\text{م (المضلع الأكبر)}} = \left(\frac{12}{16}\right)^2 = \frac{9}{16}$

∴ $\frac{135}{\text{م (الأكبر)}} = \frac{9}{16}$

∴ مساحة المضلع الأكبر = 240 سم²

تدريب إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين 2 : 3 وكانت مساحة الأكبر 90 سم² فأوجد مساحة الأصغر.

مثال 4 مضلعان متشابهان مساحتاهما 100 سم² ، 64 سم² ، فإذا كان محيط الأول = 60 سم فأوجد محيط الثاني

الحل

∵ $\frac{\text{مساحة المضلع الأول}}{\text{مساحة المضلع الثاني}} = \frac{100}{64}$

∴ $\frac{\text{محيط الأول}}{\text{محيط الثاني}} = \frac{10}{8}$

∴ $\frac{60}{\text{محيط الثاني}} = \frac{10}{8}$

∴ محيط المضلع الثاني = $\frac{60 \times 8}{10}$ = 48 سم

مثال 5 مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما 3 : 2 ومجموع مساحتيهما 130 سم² أوجد مساحة كل منهما

الحل

∵ $\frac{\text{مساحة الأول}}{\text{مساحة الثاني}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

ونفرض أن مساحة الأول 9 س والثاني 4 س

∴ مجموع مساحتيهما 13 س = 130

∴ س = 10

∴ مساحة المضلع الأول = 9 × 10 = 90 سم²

، مساحة المضلع الثاني = 4 × 10 = 40 سم²

تدريب مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٣ فإذا كان الفرق بين مساحتيهما ٨٠ سم² فأوجد مساحة كل منهما

الحل

الفكرة الثانية

مثال ٦ أ ب جـ مثلث فيه ء ∈ أب بحيث أء = ٢ ب ء ، هـ ∈ أجـ حيث ءهـ // بجـ إذا كانت مساحة △ أءهـ = ٦٠ سم² أوجد مساحة شبه المنحرف ء ب جـ هـ

الحل

∵ ءهـ // بجـ

∴ △ أءهـ ∼ △ أبجـ

∵ النسبة بين أء : أب = ٢ : ٣

∴ النسبة بين مساحة △ أءهـ : مساحة △ أبجـ

= ٤ : ٩

نفرض أن مساحة △ أءهـ = ٤ س

، مساحة △ أبجـ = ٩ س

∴ ٤ س = ٦٠ ∴ س = ١٥

∴ مساحة △ أبجـ = ١٥ × ٩ = ١٣٥ سم²

∵ م △ أءهـ = ٦٠ سم²

∴ مساحة شبه المنحرف (ء ب جـ هـ)

= ١٣٥ − ٦٠ = ٧٥ سم²

مثال ٧ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة بحيث $\frac{أب}{أجـ} = \frac{٥}{٣}$ ، أء مماساً للدائرة عند أ قطع بجـ في ء

أوجد م(△ أجـء) : م(△ أبجـ)

الحل

△△ أجـء ، بءأ

فيهما ∠ء مشتركة

م(∠ءأجـ) = م(∠ب) [مماسية ومحيطية مشتركتان في أجـ]

∴ △ أءجـ ∼ △ بءأ

∴ $\frac{م(△ أءجـ)}{م(△ بءأ)} = \left(\frac{أجـ}{أب}\right)^2 = \frac{٩}{٢٥}$

∴ $\frac{م(△ أءجـ)}{م(△ أبجـ) + م(△ أءجـ)} = \frac{٩}{٢٥}$

∴ ٢٥ م(△ أءجـ) = ٩ م(△ أبجـ) + ٩ م(△ أءجـ)

٢٥ م(△ أءجـ) − ٩ م(△ أءجـ) = ٩ م(△ أبجـ)

١٦ م(△ أءجـ) = ٩ م(△ أبجـ)

∴ $\frac{م(△ أءجـ)}{م(△ أبجـ)} = \frac{٩}{١٦}$

مثال ٨

في الشكل المقابل

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، هـ ∈ $\overline{أب}$

حيث $\frac{أهـ}{هـب} = \frac{٣}{٢}$ ، $\overleftrightarrow{دهـ} \cap \overleftrightarrow{جـب} = \{و\}$

① أثبت أن △ د جـ و ~ △ هـ أ د

② أوجد $\frac{م(△ د جـ و)}{م(△ هـ أ د)}$

الحل

∵ $\overline{وجـ} \parallel \overline{أد}$ ، $\overleftrightarrow{دو}$ قاطع لهما

∴ ق(و̂) = ق(أ د̂ هـ) (بالتبادل)

، ∵ ق(جـ̂) = ق(أ̂) من خواص متوازي الأضلاع

∴ △ د جـ و ~ △ هـ أ د # أولاً

∴ $\frac{م(△ د جـ و)}{م(△ هـ أ د)} = \left(\frac{دجـ}{أهـ}\right)^2 = \left(\frac{أب}{أهـ}\right)^2 = \left(\frac{٥}{٣}\right)^2 = \frac{٢٥}{٩}$

مثال ٩

أ ب جـ د متوازي أضلاع

س ∈ $\overrightarrow{أب}$ ، س ∉ $\overline{أب}$ حيث ب س = ٢ أب

، ص ∈ $\overrightarrow{جـب}$ ، ص ∉ $\overline{جـب}$ حيث ب ص = ٢ ب جـ ،

رسم متوازي الأضلاع ب س ع ص

أثبت أن $\frac{م(▱ أ ب جـ د)}{م(▱ س ب ص ع)} = \frac{١}{٤}$

الحل

∵ ق(أ ب̂ جـ) = ق(س ب̂ ص) بالتقابل بالرأس

∴ ق(أ̂) = ق(س̂)

، ق(جـ̂) = ق(ص̂)

، ق(د̂) = ق(ع̂)

، ∵ $\frac{أب}{س ب} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ب جـ}{ب ص} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{جـ د}{ص ع} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{أ د}{س ع} = \frac{١}{٢}$

∴ ▱ أ ب جـ د ~ ▱ س ب ص ع

∴ $\frac{م(▱ أ ب جـ د)}{م(▱ س ب ص ع)} = \left(\frac{١}{٢}\right)^2 = \frac{١}{٤}$ #

مثال ١٠

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع أثبت أن

م(△ أ ب س) + م(△ ب جـ ص) = م(△ أ جـ ع)

الحل

∵ △△△ أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع متساويات الأضلاع

∴ △ أ ب س ~ △ ب جـ ص ~ △ أ جـ ع

∴ $\frac{م(△ أ ب س)}{م(△ أ جـ ع)} = \left(\frac{أب}{أجـ}\right)^2 = \frac{(أب)^2}{(أجـ)^2}$ ← (١)

، $\frac{م(△ ب جـ ص)}{م(△ أ جـ ع)} = \left(\frac{ب جـ}{أ جـ}\right)^2 = \frac{(ب جـ)^2}{(أ جـ)^2}$ ← (٢)

بجمع ① ، ②: ∴ $\frac{م(△ أ ب س) + م(△ ب جـ ص)}{م(△ أ جـ ع)} = \frac{(أجـ)^2}{(أجـ)^2}$

∴ م(△ أ ب س) + م(△ ب جـ ص) = م(△ أ جـ ع) #

(١)

في الشكل المقابل

$$\frac{م(\Delta\ أ ب هـ)}{م(\Delta\ د جـ هـ)} = ...$$

(أ) $\frac{9}{49}$ (ب) $\frac{25}{49}$ (جـ) $\frac{9}{25}$ (د) $\frac{16}{49}$

$$= \left(\frac{ب هـ}{د هـ}\right)^2 = \frac{(ب هـ)^2}{49}$$

في Δ أ ب هـ: ب هـ $= \sqrt{25 - 9} = 16$

$$= \frac{16}{49}$$

(٢)

$$\frac{م(\Delta\ س أ ب)}{م(\Delta\ س ص ع)} = ...$$

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{5}{16}$ (جـ) $\frac{9}{25}$ (د) $\frac{4}{5}$

$$\left(\frac{س أ}{س ص}\right)^2 = \left(\frac{أ ب}{ص ع}\right)^2 = \left(\frac{س ب}{س ع}\right)^2$$

س أ $= \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$ ، س ص $= 8$

$$= \left(\frac{\sqrt{20}}{8}\right)^2 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

(٣)

أ س : س جـ = ٥ : ٣

، م(Δ أ ب جـ) = ٢٥٫٦ سم²

فإن م(Δ أ س ص) = ... سم²

(أ) ١٠ (ب) ١٦ (جـ) ٤١ (د) ٦٥٫٥

$$\frac{م(\Delta\ أ س ص)}{م(\Delta\ أ ب جـ)} = \left(\frac{أ س}{أ ب}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$$

$$\therefore \frac{م(\Delta\ أ س ص)}{25.6} = \frac{25}{64}$$

$$\therefore م(\Delta\ أ س ص) = \frac{25 \times 25.6}{64} = 10$$

(٤) في الشكل ده

إذا كان الشكل أ ب جـ د شبيه الشكل أ هـ و ى وكانت مساحة الشكل (أ ب جـ د) = ٣٢ سم²

فإن مساحة الجزء المظلل = ... سم²

(أ) ٧٢ (ب) ٤٨ (جـ) ٤٠ (د) ١٦

$$\frac{م(أ ب جـ د)}{م(أ هـ و ى)} = \left(\frac{6}{9}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\frac{32}{م(أ هـ و ى)} = \frac{4}{9}$$

$\therefore$ م(أ هـ و ى) = ٧٢ سم²

$\therefore$ مساحة الجزء المظلل = ٧٢ − ٣٢ = ٤٠ سم²

الواجب

١) مضلعان متشابهان النسبة بين محيطيهما ٤ : ٩ فإن النسبة بين مساحتيهما ......

٢) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ١ : ٩ فإن النسبة بين محيطيهما ......

٣) إذا كانت النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين ٩ : ١٦ ومحيط الأكبر = ٢٠ سم فإن محيط الأصغر = ...

٤) إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ١ : ٤ ، ومساحة المضلع الأول ٢٥ سم² فأوجد مساحة المضلع الثاني.

٥) مضلعان متشابهان النسبة بين طولي ضلعين متناظرين ٥ : ٣ إذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ سم² فأوجد مساحة كل منهما.

٦) مضلعان متشابهان مساحتيهما ١٠٠ سم² ، ٦٤ سم² فإذا كان محيط الأول ٦٠ سم فأوجد محيط الثاني

٧) أ ب جـ د ▱ ، س ∈ أ ص حيث س ∉ أ ص ، ب س = ٢ أ ص .
أ ص ∈ جـ ص ، أ ص ∉ جـ ص [illegible]
ب أ ص = ٢ ب جـ

٨) رسم متوازي أضلاع ب س ع ص أثبت أن

$$\frac{\text{م (المتوازي أ ب جـ د)}}{\text{م (المتوازي س ص ع ل)}} = \frac{١}{٤}$$

٩) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع أ ب س ، ب جـ ص ، أ جـ ع
أثبت أن م (△ أ ب س) + م (△ ب جـ ص) = م (△ أ جـ ع)

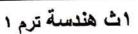
١٠) △ أ ب جـ فيه $\frac{أ ب}{ب جـ} = \frac{٤}{٣}$ ، رسمت الدائرة المارة برؤوسه ومن نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع أ جـ في هـ أثبت أن

$$\frac{\text{م (△ أ ب جـ)}}{\text{م (△ أ ب هـ)}} = \frac{٧}{١٦}$$

١١) في الشكل المقابل

أوجد $\frac{\text{م (△ أ س ص)}}{\text{م (△ أ جـ ب)}}$

مرة دخلت امتحان ... لقيت سؤال اعرفه

من الفرحة نسيت الإجابة

الدرس الخامس : تطبيقات التشابه فى الدائرة

علشان متنساش ابدأ من نقطة التقاطع

هـ أ × هـ ب = هـ ء × هـ جـ

أوجد قيمة س

(١)

∵ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

٤ × س = ٣ × ٨

∴ ٤ س = ٢٤

∴ س = ٢٤ ÷ ٤ = ٦ سم

(٢)

∵ هـ أ × هـ ب = هـ جـ × هـ ء

٣ س × ٤ س = ٦ × ١٨

∴ ١٢ س² = ١٠٨

∴ س² = ١٠٨ ÷ ١٢ = ٩

∴ س = √٩ = ٣

(٣)

∵ هـ ب × هـ أ = هـ ء × هـ جـ

٥ × ١٢ = ٦ × هـ جـ

∴ هـ جـ = (١٢ × ٥) ÷ ٦ = ١٠

∴ هـ ء = ١٠ − ٦ = ٤ سم

∴ س = ٤ سم

مثال ٢ فى الشكل المقابل

س أ مماس للدائرة م عند أ ، أوجد طول نصف قطر الدائرة.

الحل

∵ س ب × س جـ = (س أ)²

٩ × س جـ = (١٥)²

∴ س جـ = (١٥)² ÷ ٩ = ٢٥

∴ ب جـ = ٢٥ − ٩ = ١٦ سم

∴ نق = ١٦ ÷ ٢ = ٨ سم

أوجد طول $\overline{أد}$

نفرض أن أجـ = س ∴ جـ د = س

∴ أد = ٢س

∵ أجـ × أد = $(أب)^٢$

س × ٢س = $(٥\sqrt{٢})^٢$

٢ $س^٢$ = ٥٠ ∴ $س^٢ = \frac{٥٠}{٢}$

∴ $س^٢$ = ٢٥ ∴ س = ٥

∴ أد = ٢ × ٥ = ١٠ سم

عكس التمرين المشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ فى نقطة م وكان م أ . م ب = م جـ . م د فإن النقط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة

* وكذلك عكس النتيجة

إذا كان $(م جـ)^٢$ = م أ . م ب

فإن $\overleftrightarrow{م جـ}$ مماس للدائرة المارة بالمثلث أ ب جـ عند جـ

نتيجة (١)

إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس فإن حاصل ضرب طول القاطع فى طول جزئه الخارجى = مربع طول المماس

م أ × م ب = $(م جـ)^٢$ م أ × م ب = $(م جـ)^٢$

مثال ٤

أثبت أن أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة.

الحل

هـ أ × هـ جـ = ٦ × ٧ = ٤٢

هـ ب × هـ د = ٥ × ٨,٤ = ٤٢

∵ $\overline{أجـ} \cap \overline{ب د}$ = {هـ}

، هـ أ × هـ جـ = هـ ب × هـ د

∴ النقط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة.

مثال ٥

Δ أ ب جـ فيه أجـ = ٩ سم ، ب جـ = ١٢ سم

، فرضت د ∈ $\overline{أجـ}$ بحيث أ د = ٥ سم

، فرضت هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث $\frac{ب هـ}{هـ جـ}$ = ٣

اثبت أن الشكل أ ب هـ ء رباعي دائري

الحل

∵ جـ ء = ٩ − ٥ = ٤ سم

∴ جـ ء × جـ أ = ٤ × ٩ = ٣٦

∵ ب هـ = ٣ جـ هـ ∴ ب جـ = ٤ جـ هـ

∴ جـ هـ = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣ سم

∴ جـ هـ × جـ ب = ٣ × ١٢ = ٣٦

∴ جـ ء × جـ أ = جـ هـ × جـ ب

∴ الشكل أ ب هـ ء رباعي دائري

مثال ٦ في الشكل المقابل

اثبت أن

أب مماس للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء

الحل

∵ (أب)^2 = (٦)^2 = ٣٦

، ∵ أ جـ × أ ء = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ (أب)^2 = أ جـ × أ ء

∴ أب مماس للدائرة المارة بالنقط ب، جـ، ء

مثال (٧) دائرتان متقاطعتان في أ، ب ، جـ ∈ $\overleftrightarrow{أب}$ ، جـ ∉ $\overline{أب}$ ، رسم من جـ القطعتان $\overline{جـ س}$ ، $\overline{جـ ص}$ مماستين للدائرتين عند س، ص اثبت أن

جـ س = جـ ص

الحل

∵ (جـ س)^2 = جـ أ × جـ ب

، ∵ (جـ ص)^2 = جـ أ × جـ ب

∴ جـ س = جـ ص #.

مثال (٨)

من معطيات الشكل

اثبت أن ب منتصف $\overline{أجـ}$

الحل

في الدائرة م : (أب)^2 = أو × أهـ = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ أب = ٦ سم ← (١)

في الدائرة ن : (أ جـ)^2 = أهـ × أ ء = ٩ × ١٦ = ١٤٤

∴ أ جـ = ١٢ سم ← (٢)

من (١)، (٢) ∴ أب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

∴ ب منتصف $\overline{أجـ}$ #.

مثال ٩

أ ب جـ مثلث فيه د ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث د ب = ٥ سم ، د جـ = ٤ سم

فإذا كان أ جـ = ٦ سم

اثبت أن

① $\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماسة للدائرة التى تمر بالنقط أ ، ب ، د

② △ أ جـ د ~ △ ب جـ أ

③ م(△ أ ب د) : م(△ أ ب جـ) = ٥ : ٩

الحل

①

∵ $(أ جـ)^2$ = ٣٦

، جـ د × جـ ب = ٤ × ٩ = ٣٦

∴ $(أ جـ)^2$ = جـ د × جـ ب

∴ $\overleftrightarrow{أ جـ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، د # أولاً

②

∵ △△ أ جـ د ، ب جـ أ

فيهما { (جـ) مشترك ، ق(∠ د أ جـ) = ق(∠ ب) محيطية ومماسية مشتركتان فى $\overset{\frown}{أ د}$ }

∴ △ أ جـ د ~ △ ب جـ أ # ثانياً

③

∵ $\frac{م(△ أ جـ د)}{م(△ ب جـ أ)} = \left(\frac{جـ د}{جـ أ}\right)^2 = \left(\frac{٤}{٦}\right)^2 = \frac{٤}{٩}$

∴ م(△ أ جـ د) = ٤ س ، م(△ ب جـ أ) = ٩ س

∴ م(△ أ ب د) = ٥ س

∴ $\frac{م(△ أ ب د)}{م(△ أ ب جـ)} = \frac{٥ س}{٩ س} = \frac{٥}{٩}$ # ثالثاً

مثال ١٠

دائرتان متحدتا المركز م طولا نصفى قطريهما ١٢ سم ، ٧ سم ، رسم الوتر $\overline{أ د}$ فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى ب ، جـ على الترتيب.

اثبت أن أ ب × ب د = ٩٥

الحل

العمل: نرسم القطر $\overline{س ص}$ فى الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى فى ب

البرهان

∵ $\overline{أ د} \cap \overline{س ص}$ = {ب}

∴ أ ب × ب د = س ب × ب ص = ٥ × ١٩ = ٩٥ #

مثال ١١

أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، رسم $\overleftrightarrow{ب هـ} \perp \overline{أ جـ}$ فتقطع $\overline{أ جـ}$ فى هـ ، $\overline{أ د}$ فى و

① اثبت أن $(أ ب)^2$ = أ و × أ د

② اوجد طول $\overline{أ و}$

الحل

∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، $\overline{ب هـ} \perp \overline{أ جـ}$

∴ $(أ ب)^2$ = أ هـ × أ جـ ← (١)

∵ الشكل و هـ جـ د رباعى دائرى لأن فيه زاويتين متقابلتين متكاملتين.

∴ أ و × أ د = أ هـ × أ جـ ← (٢)

من ①، ② ∴ $(أ ب)^2$ = أ و × أ د # أولاً

٣٦ = أ و × ٨ ∴ أ و = ٤٫٥ سم

الواجب

١ أوجد قيمة س

(١) (٢) (٣) (٤)

أوجد نق

٢ أي من النقط التالية تقع على دائرة واحدة

(١) (٢) (٣)

هل $\overline{أب}$ مماس؟

٤ اثبت أن △ س ل م ~ △ س ع ص
لشكل ل م ع ص رباعي دائري
بطريقتين مختلفتين

٥ $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جد} = \{هـ\}$ ، أهـ = $\frac{٥}{١٢}$ بهـ ، دهـ = $\frac{٣}{٥}$ هـجـ ، إذا كان بهـ = ٣٦ سم ، جـهـ = ٣٥ سم اثبت أن النقط أ ، ب ، جـ ، د تقع على دائرة واحدة.

٦ إذا كانت $\overrightarrow{أب}$ قطعة مماسة

أوجد طول $\overline{أد}$

ما هي قيمة المثلث؟

● + ● = 10

● × ■ + ■ = 12

● × ■ − ▲ × ● = ●

▲ = ?

الوحدة الثانية — الدرس الأول : المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

نظرية (١)

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

$\frac{أد}{أهـ} = \frac{دب}{هـجـ} = \frac{أب}{أجـ}$

$\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$

$\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

$\frac{أب}{دب} = \frac{أجـ}{هـجـ}$

مثال ١

فى كل من الأشكال التالية $\overline{دهـ} \parallel \overline{بجـ}$ أوجد قيمة س العددية

١

$\frac{أهـ}{أد} = \frac{هـجـ}{دب}$

$\frac{٤}{٥} = \frac{س}{٢}$

$\therefore س = \frac{٢ \times ٤}{٥}$

$\therefore س = ١٫٦$ سم

٢

$\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

$\frac{س}{١٠} = \frac{١٢}{٨}$

$\therefore س = \frac{١٢ \times ١٠}{٨} = ١٥$ سم

٣

$\frac{دب}{أب} = \frac{هـجـ}{أجـ}$

$\frac{س}{٢٤} = \frac{١٠}{٣٠}$

$\therefore س = \frac{٢٤ \times ١٠}{٣٠} = ٨$ سم

نتيجة

إذا رسم مستقيم خارج مثلث أ ب جـ يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث $\overline{بجـ}$ ويقطع $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ فى د ، هـ فإنه

$\frac{أد}{بد} = \frac{أهـ}{جـهـ}$

وكذلك

$\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{أجـ}$ ، $\frac{أد}{دب} = \frac{أهـ}{هـجـ}$

مثال ٢

في الشكل المقابل

جـ د = ١٨ سم

أوجد طول ب هـ

الحل

∵ $\overline{د هـ}$ // $\overline{أ جـ}$

∴ $\frac{ب هـ}{جـ د} = \frac{أ ب}{أ هـ}$

$\frac{ب هـ}{١٨} = \frac{٦}{١٥}$

∴ ب هـ = $\frac{١٨ \times ٦}{١٥}$ = ٧,٢ سم

مثال ٣

أوجد طول ى هـ ، ى ب

الحل

∵ $\overline{أ د}$ // $\overline{و جـ}$

∴ $\frac{ى و}{ى د} = \frac{ى هـ}{أ ى}$

$\frac{ى و}{١٠} = \frac{٦}{١٦}$ ∴ ى هـ = $\frac{١٠ \times ٦}{١٦}$

∴ ى هـ = ٣,٧٥ سم

، ∵ $\overline{ب هـ}$ // $\overline{أ د}$

∴ $\frac{ب ى}{أ ى} = \frac{هـ ى}{د ى}$

$\frac{ب ى}{١٦} = \frac{٣}{١٠}$

∴ ى ب = $\frac{٣ \times ١٦}{١٠}$ = ٤,٨ سم

إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث وقسمهما إلى قطع متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث

إذا كان

$\frac{أ د}{د ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$

فإن $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

مثال ٤

في الشكل المقابل

أثبت أن

$\overline{هـ و}$ // $\overline{س ع}$

الحل

∵ $\frac{ص هـ}{هـ س} = \frac{٥}{٢}$ ← ①

، $\frac{ص و}{و ع} = \frac{٧,٥}{٣} = \frac{٥}{٢}$ ← ②

من ① ، ② ∴ $\frac{ص هـ}{هـ س} = \frac{ص و}{و ع}$ ∴ $\overline{هـ و}$ // $\overline{س ع}$

مثال ٥

في الشكل المقابل

إذا كان $\overline{دهـ} // \overline{بو}$

، $أد = \frac{3}{4}$ دب

، أهـ = ٤,٥ سم ، وجـ = ١٤ سم

فاثبت أن $\overline{دو} // \overline{بجـ}$

الحل

∵ $أد = \frac{3}{4}$ ب د

∴ $\frac{أد}{ب د} = \frac{3}{4}$

، ∵ $\overline{دهـ} // \overline{بو}$

∴ $\frac{أد}{د ب} = \frac{أهـ}{هـ و} = \frac{3}{4}$

∴ $\frac{4,5}{هـ و} = \frac{3}{4}$

∴ $هـ و = \frac{4 \times 4,5}{3} = 6$ سم

في △ أ ب جـ

∵ $\frac{أد}{د ب} = \frac{3}{4}$

، $\frac{أو}{و جـ} = \frac{6 + 4,5}{14} = \frac{3}{4}$

∴ $\frac{أد}{د ب} = \frac{أو}{و جـ}$

∴ $\overline{دو} // \overline{بجـ}$

مثال ٦

س ص ع △ فيه س ص = ١٤ سم ، س ع = ٢١ سم ، ل ∈ $\overline{س ص}$

بحيث س ل = ٥,٦ سم ، م ∈ $\overline{س ع}$

حيث س م = ٨,٤ سم اثبت أن

$\overline{ل م} // \overline{ص ع}$

الحل

ل ص = ١٤ − ٥,٦ = ٨,٤ سم

م ع = ٢١ − ٨,٤ = ١٢,٦ سم

$\frac{س ل}{ل ص} = \frac{5,6}{8,4} = \frac{2}{3}$

$\frac{س م}{م ع} = \frac{8,4}{12,6} = \frac{2}{3}$

∴ $\frac{س ل}{ل ص} = \frac{س م}{م ع}$

∴ $\overline{ل م} // \overline{ص ع}$

عندما كان عمري ٤ سنوات،
كان عمر أخي نصف عمري.
أنا الآن عمري ١٨ سنة،
فكم أصبح عمر أخي؟

اختر

١ فى الشكل المقابل $\overline{أب} // \overline{حـ د}$ ، ٢ أهـ = ٣ هـ د ، ب هـ − حـ هـ = ٤ سم فإن ب حـ = ... سم

(أ) ١٨ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٤ (د) ٢٥

$\frac{أهـ}{هـ د} = \frac{ب هـ}{هـ حـ} = \frac{٣ل}{٢ل}$ ∴ ب هـ − هـ حـ = ل

∴ ل = ٤ ، ب حـ = ٥ل ∴ ب حـ = ٢٠ سم

فى △ أ ب د يكون $\frac{أد}{أب} = \frac{أهـ}{هـ حـ}$ ← (١)

فى △ أ ب هـ يكون $\frac{أد}{أب} = \frac{أو}{أهـ}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\frac{أهـ}{هـ حـ} = \frac{أو}{أهـ}$ ∴ أو × أحـ = $(أهـ)^2$

٢ فى الشكل المقابل

س = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

٥ إذا كانت م نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

فإن ٢س + ص = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥

الحل : نرسم $\overline{أو}$ يمر بنقطة م ويقطع $\overline{ب حـ}$ فى و

ويكون $\frac{أم}{م و} = \frac{٢}{١} = \frac{ص + ٣}{ص}$ ∴ ص = ٣

، $\frac{٢س + ٦}{٤} = \frac{٢}{١}$ س = ١

٣ فى الشكل المقابل

أ ص = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٠

∵ أص = س ص = ل

∴ $\frac{ل}{١٢} = \frac{٣}{ل}$ ∴ $ل^2 = ٣٦$ ∴ ل = ٦

∴ أ ص = ٦ + ١٢ = ١٨ سم

٦ إذا كان $\overline{أب} // \overline{حـ د}$

فإن ع = ...

(أ) $\frac{س − ص}{٢}$ (ب) $\frac{س + ص}{٢}$

(جـ) ٥س + ٥ص (د) $\frac{س + ص}{٥}$

$\frac{س + ص}{س + ص + ع} = \frac{٢}{٣}$

بفرض أن س + ص = ٢ل ∴ س + ص + ع = ٣ل

∴ ع = ل ولكن ل = $\frac{س + ص}{٢}$

∴ ع = $\frac{س + ص}{٢}$

٤ أو × أحـ = ...

(أ) أهـ (ب) $(أهـ)^2$

(جـ) $(أد)^2$ (د) وهـ × هـ حـ

ألادهم فى الرياضيات
٢٣
١ث هندسة ترم ١
الواجب
١ فى كل من الأشكال التالية ده // ب ج
١ أوجد طول ب د
٢ أوجد طول ب د
٣ أوجد طول أ هـ
٢ فى كل من الأشكال التالية حدد إذا كان ده // ب ج
٣ △ أ ب ج ، د ∈ أ ب ، هـ ∈ أ ج بحيث ٥ أ هـ = ٤ هـ ج إذا كان أ د = ١٠ سم ، د ب = ٨ سم حدد ما إذا كان ده // ب ج
٤ أ ب ج د شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ فإذا كان أ هـ = ٦ سم ، ب هـ = ١٣ سم ، هـ ج = ١٠ سم ، هـ د = ٧,٨ سم اثبت أن أ ب ج د شبه منحرف
٥ أوجد طول هـ و ثم اثبت أن د هـ // ب و
فى لحظة ما كان عمر خالد ١٠ سنوات وعمر أحمد ربع عمر خالد (فى نفس اللحظة).. متى يصير عمر أحمد ثلث عمر خالد؟
fb/Quiz.Math.Puzzles
مقوله أعجبتني :
إجعل من يراك
يدعو لمن رباك

الوحدة الثانية

الدرس الثانى : نظرية تاليس

نظرية تاليس العامة

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر

$$\frac{أب}{أ\bar{ب}} = \frac{ب جـ}{\bar{ب}\,\bar{جـ}} = \frac{جـ ء}{\bar{جـ}\,\bar{ء}} = \frac{أ جـ}{أ\bar{جـ}}$$

وكذلك نلاحظ أن

$$\frac{أ جـ}{جـ ء} = \frac{أ\bar{جـ}}{\bar{جـ}\,\bar{ء}}$$

$$\frac{أ جـ}{جـ ب} = \frac{أ\bar{جـ}}{\bar{جـ}\,\bar{ب}}$$

$$\frac{ب ء}{ء أ} = \frac{\bar{ب}\,\bar{ء}}{\bar{ء}\,أ}$$ وهكذا

١ حالات خاصة

إذا كان $ل_1 // ل_2$ ، $م_1$ ، $م_2$ قاطعان لهما

فإن $\frac{أب}{أجـ} = \frac{أ\bar{ب}}{أ\bar{جـ}}$

والعكس صحيح

بمعنى إذا كان $\frac{أب}{أجـ} = \frac{أ\bar{ب}}{أ\bar{جـ}}$

فإن $\overleftrightarrow{ب\bar{ب}} // \overleftrightarrow{جـ\bar{جـ}}$

٢ نظرية تاليس الخاصة

إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فى الطول فإن أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية أيضاً فى الطول

إذا كان

$أب = ب جـ = جـ ء$

فإن

$أ\bar{ب} = \bar{ب}\,\bar{جـ} = \bar{جـ}\,\bar{ء}$

مثال ١

أوجد طول $\overline{هـ ن}$ ، $\overline{م جـ}$

الحل

∵ $\overline{د هـ} // \overline{م ن} // \overline{جـ ب}$

∴ $\frac{أ د}{أ هـ} = \frac{د م}{هـ ن} = \frac{م جـ}{ن ب}$

∴ $\frac{٦}{١٢} = \frac{١٠}{هـ ن} = \frac{م جـ}{٥}$

∴ هـ ن $= \frac{١٢ \times ١٠}{٦} = ٢٠$ سم

، م جـ $= \frac{٦ \times ٥}{١٢} = ٢,٥$ سم

مثال ٢

أوجد قيمة س ، ص بالعدديـ

الحل

∵ $\overleftrightarrow{أ هـ} // \overleftrightarrow{ب و} // \overleftrightarrow{جـ ع} // \overleftrightarrow{د ن}$

∴ $\frac{أ ب}{هـ و} = \frac{ب جـ}{و ع} = \frac{جـ د}{ع ن}$

$\frac{س}{س+٣} = \frac{٢ص - ٥}{ص} = \frac{٦}{٨}$

∴ $\frac{س}{س+٣} = \frac{٦}{٨}$

$٨س = ٦(س+٣)$

$٨س = ٦س + ١٨$

$٨س - ٦س = ١٨$ ∴ $٢س = ١٨$

$س = \frac{١٨}{٢} = ٩$

وكذلك $\frac{٢ص - ٥}{ص} = \frac{٦}{٨}$

$٨(٢ص - ٥) = ٦ص$

$١٦ص - ٤٠ = ٦ص$

$١٦ص - ٦ص = ٤٠$

∴ $١٠ص = ٤٠$

∴ $ص = ٤$

مثال ٣

إذا كان ب س = ص د فأوجد طول $\overline{ص جـ}$

الحل

∵ $\overline{أ د} // \overline{س ص} // \overline{ب جـ}$

∴ $\frac{أ س}{د ص} = \frac{س ب}{ص جـ}$ ، ∵ س ب = ص د

∴ $\frac{أ س}{ص د} = \frac{ص د}{ص جـ}$ $\frac{٩}{ص د} = \frac{ص د}{٤}$

∴ $(ص د)^٢ = ٣٦$ ∴ ص د $= ٦$ سم

مثال ٤

الحل

إذا كان س ع = ١٠ سم

فأوجد ص ع = ... سم

∵ أب = ب و ∴ س ص = ص ع

∴ ص ع = ١/٢ × ١٠ = ٥ سم

مثال ٥

أوجد قيمة س ، ص

الحل

∵ أب // م د // ن هـ

، ب د = د هـ = هـ جـ

∴ أم = م ن = ن جـ

∴ س² - ١ = س + ٥ ← (١)

س² - س - ١ - ٥ = ٠

س² - س - ٦ = ٠

(س + ٢)(س - ٣) = ٠

س = -٢ أو س = ٣

∴ أم = ٤ - ١ = ٣ | أم = ٩ - ١ = ٨

م ن = -٢ + ٥ = ٣ | م ن = ٣ + ٥ = ٨

∴ م ن = ٣ أو م ن = ٨

٥ص - ٢ = ٣ | ٥ص - ٢ = ٨

٥ص = ٥ | ٥ص = ١٠

∴ ص = ١ | ص = ٢

مثال ٦

أوجد قيمة س ، ص

الحل

∵ أد // ب هـ // جـ و ، د هـ = هـ و = و م

∴ أب = ب جـ = جـ م

∴ س² - ٢ = س + ٤ = ٢ص - ٢

س² - ٢ = س + ٤

س² - س - ٢ - ٤ = ٠

س² - س - ٦ = ٠

(س + ٢)(س - ٣) = ٠

إما س = -٢ أو س = ٣

أب = ٤ - ٢ = ٢ | أب = ٩ - ٢ = ٧

ب جـ = -٢ + ٤ = ٢ | ب جـ = ٣ + ٤ = ٧

∴ ٢ص - ٢ = ٢ | ∴ ٢ص - ٢ = ٧

٢ص = ٢ + ٢ | ٢ص = ٧ + ٢

٢ص = ٤ | ٢ص = ٩

∴ ص = ٢ | ∴ ص = ٤,٥

مثال ٧

إذا كان س ل = ١٢ سم

فأوجد س ع = ... سم

١٢/٣ = ٤ ∴ س ص = ص ع = ع ل = ٤ سم

∴ س ع = ٨ سم

الوحدة الثانية

الدرس الثالث : منصفا الزاوية

نظرية (٣)

إذا نُصِّفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس ، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين كانت النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين

$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ منصف داخلي

$\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = \frac{\text{دب}}{\text{دج}}$

$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ منصف خارجي

$\frac{\text{أب}}{\text{أج}} = \frac{\text{دب}}{\text{دج}}$

$\text{أد} = \sqrt{\text{أب} \times \text{أج} - \text{ب د} \times \text{د ج}}$

من الداخل: الضلعين − الجزئين

$\text{أد} = \sqrt{\text{د ب} \times \text{د ج} - \text{أب} \times \text{أج}}$

من الخارج: الجزئين − الضلعين

١ المنصفان الداخلي والخارجي لنفس الزاوية من المثلث متعامدان

٢ قياس الزاوية بين المنصف الداخلي والخارجي = ٩٠° [قائمة]

٣ المنصف الخارجي لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يوازي القاعدة .

٤ منصفات زوايا المثلث الداخلة تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة الداخلة للمثلث .

من أراد الدنيا فعليه بالقرآن
ومن أراد الآخرة فعليه بالقرآن
ومن أرادهما معاً فعليه بالقرآن

مثال ١

فى الشكل المقابل

أوجد طول $\overline{أب}$ ، $\overline{أء}$

الحل

∵ $\overline{أء}$ ينصف $\hat{أ}$

$\therefore \frac{أب}{أجـ} = \frac{بء}{ءجـ}$

$\therefore \frac{أب}{٥} = \frac{٦}{٤}$

$أب = \frac{٥ \times ٦}{٤} = ٧,٥$ سم

$أء = \sqrt{أب \times أجـ - بء \times ءجـ}$

$= \sqrt{٧,٥ \times ٥ - ٤ \times ٦} \simeq ٣,٧$ سم

مثال ٢

فى الشكل المقابل

أوجد طول $\overline{أب}$ ، $\overline{أهـ}$

الحل

$\overline{أهـ}$ المنصف

$\frac{أب}{أجـ} = \frac{هـب}{هـجـ}$

$\frac{أب}{٩} = \frac{١٦}{١٢}$

$\therefore أب = \frac{٩ \times ١٦}{١٢} = ١٢$ سم

طول المنصف $\overline{أهـ}$

$أهـ = \sqrt{هـجـ \times هـب - أجـ \times أب}$

$= \sqrt{١٢ \times ١٦ - ٩ \times ١٢}$

$\simeq ٩,١٧$ سم

مثال ٣

فى الشكل المقابل

أوجد طول $\overline{بء}$ ، $\overline{أء}$

الحل

∵ $\overrightarrow{أء}$ تنصف $(ب\hat{أ}جـ)$

$\therefore \frac{ءب}{ءجـ} = \frac{أب}{أجـ}$

$ءجـ = ١٠ - بء$

$\frac{بء}{١٠ - بء} = \frac{٨}{١٢}$

$١٢ بء = ٨ (١٠ - بء)$

$١٢ بء = ٨٠ - ٨ بء$

$١٢ بء + ٨ بء = ٨٠$

$٢٠ بء = ٨٠$

$بء = \frac{٨٠}{٢٠} = ٤$ سم

$\therefore ءجـ = ١٠ - ٤ = ٦$ سم

طول المنصف أد

أد = √(أب × أجـ − بد × دجـ)

= √(٨ × ١٢ − ٤ × ٦) ≃ ٨،٤٩ سم

مثال ٤

فى الشكل المقابل: أوجد طول بد، أد

الحل

∵ أد← ينصف (ب أ جـ)

∴ أب / أجـ = بد / دجـ

٣ / ٤،٥ = بد / (بد + ٢،٥)

٤،٥ بد = ٣(بد + ٢،٥)

٤،٥ بد = ٣ بد + ٧،٥

٤،٥ بد − ٣ بد = ٧،٥

١،٥ بد = ٧،٥

∴ بد = ٧،٥ / ١،٥ = ٥ سم

أد = √(دب × دجـ − أب × أجـ)

= √(٥ × ٧،٥ − ٣ × ٤،٥) ≃ ٤،٩ سم

مثال ٥

فى الشكل المقابل أوجد طول دجـ، جـهـ

الحل

∵ أد← ينصف ب أ جـ من الداخل

∴ أب / أجـ = بد / دجـ

٩ / ٦ = (٨ − دجـ) / دجـ

٩ دجـ = ٦(٨ − دجـ)

٩ دجـ = ٤٨ − ٦ دجـ

٩ دجـ + ٦ دجـ = ٤٨

١٥ دجـ = ٤٨

دجـ = ٤٨ / ١٥ = ٣،٢

فى △ أب هـ

، ∵ أهـ← ينصف (جـ أ و) من الخارج

∴ أب / أجـ = بهـ / هـجـ ∴ ٩ / ٦ = (جـهـ + ٨) / جـهـ

٩ جـهـ = ٦(جـهـ + ٨)

٩ جـهـ = ٦ جـهـ + ٤٨

٩ جـهـ − ٦ جـهـ = ٤٨

٣ جـهـ = ٤٨ ∴ جـهـ = ٤٨ / ٣ = ١٦ سم

مثال ٦

أوجد قيمة س ، ص

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف $(\hat{\text{أ}})$ الخارجة

∴ $\frac{\text{ءجـ}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

∴ $\frac{\text{ص}+٢}{\text{ص}+٢+٧} = \frac{٣}{٤}$

$٤(\text{ص}+٢) = ٣(\text{ص}+٩)$

$٤\text{ص}+٨ = ٣\text{ص}+٢٧$

$٤\text{ص}-٣\text{ص} = ٢٧-٨$

$\text{ص} = ١٩$

∴ $\text{ءجـ} = \text{ص}+٢ = ١٩+٢ = ٢١$ سم

∴ $\text{أء} = \sqrt{\text{ءجـ}\times\text{ءب} - \text{أجـ}\times\text{أب}}$

$= \sqrt{٢١\times٢٨ - ٦\times٨} \simeq ٢٣٫٢٣$ سم

استراحة

عشرة وعشرتين وقلبهم مرتين وخمسة وثلاثة واتنين يبقوا كام ؟

إذا كان

$\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{ءب}}{\text{ءجـ}}$

فإن $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف $(\text{ب}\hat{\text{أ}}\text{جـ})$ الداخلة أو الخارجة

مثال ٧

في الشكل المقابل

اثبت أن

$\overrightarrow{\text{ءص}}$ ينصف $(\text{أ}\hat{\text{ء}}\text{جـ})$

الحل

في △ أءب ∵ $\overrightarrow{\text{ءس}}$ ينصف $(\text{أ}\hat{\text{ء}}\text{ب})$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{ءأ}}{\text{ءب}}$ ← ①

في △ أبجـ ∵ $\overline{\text{سص}} \parallel \overline{\text{بجـ}}$

∴ $\frac{\text{أس}}{\text{سب}} = \frac{\text{أص}}{\text{صجـ}}$ ← ②

من (١)، (٢) ينتج أن

$\frac{\text{ءأ}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أص}}{\text{صجـ}}$ ، ∵ ءب = ءجـ

∴ $\frac{\text{ءأ}}{\text{ءجـ}} = \frac{\text{أص}}{\text{صجـ}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{ءص}}$ ينصف $(\text{أ}\hat{\text{ء}}\text{جـ})$

مثال ٨ في الشكل المقابل

اثبت أن

جـ هـ ينصف ($\hat{}$ ب ج د)

الحل

في Δ أ ب د فيه أهـ ينصف ($\hat{}$ ب أ د)

∴ $\frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ د}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ د}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$ ← (١)

في Δ ب ج د

∴ $\frac{\text{ج ب}}{\text{ج د}} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$ ← (٢)

∴ من (١)، (٢)

$\frac{\text{ج ب}}{\text{ج د}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{هـ د}}$

∴ جـ هـ ينصف ($\hat{}$ ب ج د) #

مثال ٩ في الشكل المقابل

أوجد طول أد

الحل

تذكر أن منصفات زوايا المثلث الداخلة تتلاقى في نقطة واحدة.

∵ أم ينصف ($\hat{}$ ب أ ج)، ب م ينصف ($\hat{}$ أ ب ج)

∴ م هي نقطة تلاقي منصفات زوايا Δ أ ب ج

∴ جـ م ينصف ($\hat{}$ أ ج ب)

∴ في Δ أ ب ج ∴ $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ج أ}}{\text{ج ب}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

$\frac{\text{أ د}}{٦ - \text{أ د}} = \frac{١}{٢}$

٦ − أد = ٢ أد

٦ = أد + ٢ أد

٣ أد = ٦ ∴ أد = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ سم

حكمة

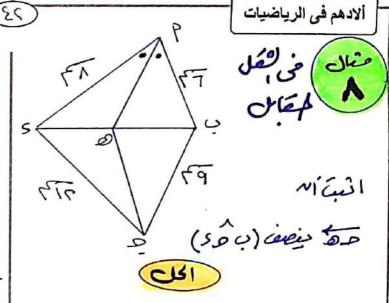
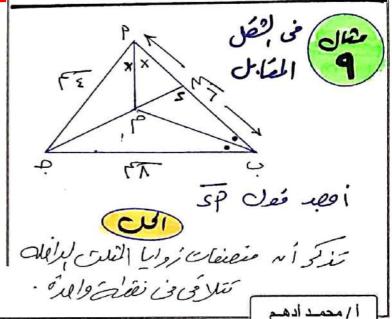
الإعتذار عن الخطاء لا يجرح كرامتك ...

بل يجعلك كبيراً بعين من اخطأت بحقه ...

حكمة اليوم

أنت من تحدد قيمة نفسك

فلا تصغر من شأنك حين ترى

فخامة الآخرين فلو كانت القيمة

∴ $\frac{بد}{دجـ} = \frac{أب}{أجـ}$

∴ $\overleftarrow{أد}$ ينصف $(\hat{أ})$ # أولاً

(٢) في △ أ ب و : ∵ $\overleftarrow{أهـ}$ ينصف $(\hat{أ})$ ، أهـ ⊥ ب و

∴ △△ أهـ ب ، أهـ و متطابقان

∴ △ أ ب و متساوي الساقين

∴ أب = أو = ٦ سم

∴ جـ و = ٩ − ٦ = ٣ سم

∵ △△ ب أ و ، جـ ب و مشتركان في الرأس ب ، و جـ ⊂ $\overleftarrow{أجـ}$

∴ $\frac{م(△ أ ب و)}{م(△ جـ ب و)} = \frac{أو}{وجـ} = \frac{٦}{٣} = ٢$

تذكر أن النسبة بين مساحتي مثلثين مرسومين على قاعدة واحدة ومشتركان في الرأس تساوي النسبة بين طولي قاعدتيهما .

"حين سكت أهل الحق عن الباطل ، توهم أهل الباطل أنهم على حق"
علي بن أبي طالب

مثال ١٠

دائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ رسم مستقيم يوازي $\overleftrightarrow{م ن}$ فقطع الدائرة م في ب ، جـ والدائرة ن في د ، هـ على الترتيب . فإذا تقاطع $\overleftarrow{ب م}$ ، $\overleftarrow{هـ ن}$ في {و} أثبت أن $\overleftarrow{و أ}$ ينصف $(م \hat{و} ن)$

الحل

في △ ب و هـ

∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ // ب هـ

∴ $\frac{ب م}{و م} = \frac{هـ ن}{و ن}$

∵ ب م = م أ

، هـ ن = أ ن

∴ $\frac{م أ}{م و} = \frac{أ ن}{و ن}$ ∴ $\frac{م أ}{أ ن} = \frac{و م}{و ن}$

∴ $\overleftarrow{و أ}$ ينصف $(م \hat{و} ن)$ # .

مثال ١١

في الشكل المقابل

من معطيات الشكل

(١) اثبت أن $\overleftarrow{أد}$ ينصف $(\hat{أ})$

(٢) أوجد: م(△ أ ب و) : م(△ جـ ب و)

الحل

(١) في △ أ ب جـ ∵ جـ د = ١٠ − ٤ = ٦ سم

∴ $\frac{بد}{دجـ} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

، $\frac{أب}{أجـ} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

اختر

(١) في الشكل المقابل

ب د = ... سم

(أ) ٤ (ب) $\frac{٨}{٣}$ (ج) ٤,٥ (د) ٤٥

$\frac{د ب}{د ج} = \frac{أ ب}{أ ج} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

بفرض أن ب د = ٣ ل ، د ج = ٤ ل

∴ ب ج = ٧ ل

ب د = $\frac{٣}{٧}$ × ١٠,٥ = ٤,٥

(٢) ج د = ... سم

(أ) ٢ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٨

أ د منصف خارجي للزاوية (أ)

∴ $\frac{د ج}{د ب} = \frac{أ ج}{أ ب} = \frac{١}{٢}$

$\frac{د ج}{د ج + ٦} = \frac{١}{٢}$ ، ٢ د ج = د ج + ٦

∴ د ج = ٦ سم

(٣) $\frac{د و}{و ج} = \frac{.....}{.....}$

(أ) $\frac{٤}{٣}$ (ب) $\frac{٨}{٧}$ (ج) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

$\frac{د و}{و ج} = \frac{د هـ}{هـ ب} = \frac{أ د}{أ ب} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

(٤) أ ج = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

أ د منصف خارجي للزاوية (أ)

$\frac{د ج}{د ب} = \frac{أ ج}{أ ب}$ ∵ $\frac{د ج}{د ب} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{أ ج}{١٢} = \frac{١}{٢}$ ∴ أ ج = ٦ سم

(٥) إذا كان أ ج − أ ب = ٦ سم فإن أ ج = ... سم

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (ج) ١٥ (د) ١٦

∵ أ ج − أ ب = ٦ ∴ أ ج − ٦ = أ ب

أ د منصف داخلي ∴ $\frac{أ ب}{أ ج} = \frac{ب د}{د ج} = \frac{٦}{١٠}$

$\frac{أ ج - ٦}{أ ج} = \frac{٦}{١٠}$ مقص ∴ أ ج = ١٥ سم

(٦) أ ج = ... سم

(أ) ١٢ (ب) ١٠ (ج) ٩ (د) ٨

أ ب = ٣ ل ، أ ج = ٤ ل

$\sqrt{٣ل × ٤ل - ١٢} = ٦$ بتربيع الطرفين

١٢ ل² − ١٢ = ٣٦ ∴ ١٢ ل² = ٤٨ ل² = ٤

∴ ل = ٢ ∴ أ ج = ٤ × ٢ = ٨ سم

الواجب

أوجد فيه س ، ص

(١) (٢) (٣) (٤)

(٥) ثم أوجد أ د

(٦) ثم أوجد ب د

(٧) Δ أ ب جـ فيه أ ب = ٣٠ سم ، أ جـ = ٣٦ سم و ب جـ = ١٢ سم نصف ($\hat{أ}$) بمنصف قطع ب جـ في هـ أوجد طول هـ جـ

(٨) في الشكل المقابل اثبت أن س ص // ب جـ

(٩) اثبت أن ب هـ ينصف (أ $\hat{ب}$ جـ)

(١٠) أ ب جـ مثلث ، د ∈ ب جـ ، د ∉ ب جـ حيث د جـ = أ ب ورسم جـ هـ // د أ ويقطع أ ب في هـ ورسم هـ و // ب جـ ويقطع أ جـ في و . اثبت أن ب و ينصف (أ $\hat{ب}$ جـ)

الوحدة الثانية

الدرس الرابع : تطبيقات التناسب فى الدائرة

قوة نقطة بالنسبة لدائرة

$ق_م(أ) = (أم)^٢ - نق^٢$

قوة النقطة أ بالنسبة للدائرة م = (البعد بين النقطة والمركز)^٢ - نق^٢

إذا كانت $ق_م(أ) > ٠$ موجبة

∴ أم > نق وتكون النقطة خارج الدائرة

إذا كانت $ق_م(أ) = ٠$

∴ أم = نق وتكون النقطة تقع على الدائرة.

إذا كانت $ق_م(أ) < ٠$ سالبة

∴ أم < نق وتكون النقطة داخل الدائرة.

مثال ١ إذا كان م دائرة نصف قطرها نق فأوجد قوة النقطة أ فى الحالات التالية

(١) أم = ١٢ سم ، نق = ٩ سم

الحل

$ق_م(أ) = (أم)^٢ - (نق)^٢$

$= (١٢)^٢ - (٩)^٢ = ٦٣$

∴ النقطة تقع خارج الدائرة

(٢) أم = ٧ سم ، نق = ٧ سم

الحل

$ق_م(أ) = (أم)^٢ - نق^٢$

$= ٧^٢ - ٧^٢ =$ صفر

∴ أ تقع على محيط الدائرة.

(٣) أم = ٦ سم ، نق = ٧ سم

الحل

$ق_م(أ) = (أم)^٢ - نق^٢$

$= (٦)^٢ - (٧)^٢ = -١٣$

∴ أ داخل الدائرة

مثال ٢ إذا كان نق = ٣ سم حدد موقع النقط التالية والبعد إذا كان

(١) $ق_م(أ) = ١٦$

الحل

$ق_م(أ) > ٠$ موجب

∴ أ خارج الدائرة

$ق_م(أ) = (أم)^٢ - نق^٢$

$(أم)^٢ - ٣^٢ = ١٦$

$(أم)^٢ = ١٦ + ٩ = ٢٥$

∴ $أم = \sqrt{٢٥} = ٥$ سم

$ق_م(ب) = صفر$

الحل

∵ $ق_م(ب) = صفر$ ∴ ب تقع على الدائرة

∴ م ب = نق = ٣ سم

---

٣) $ق_م(ﺟ) = -٥$

الحل

∵ $ق_م(ﺟ) = -٥ < ٠$ سالب يعني

∴ ﺟ تقع داخل الدائرة

∵ $ق_م(ﺟ) = (م ﺟ)^٢ - نق^٢$

$(م ﺟ)^٢ - ٣^٢ = -٥$

$(م ﺟ)^٢ = -٥ + ٩ = ٤$

∴ $م ﺟ = \sqrt{٤} = ٢$ سم

ملاحظات

$ق_م(أ) = -أب \times أ\bar{ب}$

$= -أﺟ \times أ\bar{ﺟ}$

$ق_م(أ) = أب \times أ\bar{ب}$

$= أﺟ \times أ\bar{ﺟ}$

$= (أد)^٢$

مثال ٣

نق = ٣ سم

أم = ٥ سم

أب = ٢٫٥ سم

أوجد طول كل من $\overline{ب ﺟ}$ ، $\overline{أد}$

الحل

∵ $ق_م(أ) = (أم)^٢ - نق^٢ = (٥)^٢ - (٣)^٢ = ١٦$

∵ $ق_م(أ) = أب \times أﺟ = (أد)^٢ = ١٦$

∴ $أب \times أﺟ = ١٦$

$٢٫٥ \times أﺟ = ١٦$ ∴ $أﺟ = \frac{١٦}{٢٫٥}$

∴ $أﺟ = ٦٫٤$ سم ∴ $ب ﺟ = ٦٫٤ - ٢٫٥ = ٣٫٩$ سم

∵ $(أد)^٢ = ١٦$ ∴ $أد = \sqrt{١٦} = ٤$ سم

مثال ٤

أوجد طول $\overline{أﺟ}$

الحل

∵ $أﺟ \times أد = (أب)^٢$

∴ $أﺟ \times ٢أﺟ = (٣\sqrt{٢})^٢$

$٢(أﺟ)^٢ = ١٨$

∴ $(أﺟ)^٢ = \frac{١٨}{٢} = ٩$

∴ $أﺟ = \sqrt{٩} = ٣$ سم

اذا كان $ق_م(أ) = نق$ فإن أ خارج الدائرة تعرف ليه ؟؟

زاوية تقاطع وترية

داخل الدائرة

$ق(\widehat{أهـجـ}) = \frac{1}{2}[ق(\widehat{أجـ}) + ق(\widehat{بد})]$

$= \frac{1}{2}$ مجموع القوسين المقابلين لها

خارج الدائرة

$ق(\widehat{هـ})$

$= \frac{1}{2}[ق(\widehat{أجـ}) - ق(\widehat{بد})]$

$= \frac{1}{2}$ [قياس القوس الأكبر − قياس القوس الأصغر]

مثال ٥

أوجد قيمة س فى كل مما يلى

(١)

$س = \frac{1}{2}[ق(\widehat{أد}) + ق(\widehat{بجـ})]$

$س° = \frac{1}{2}[١١٠ + ٦٠]$

$= \frac{1}{2} \times (١٧٠)$

$= ٨٥°$

(٢)

$س = \frac{1}{2}[ق(\widehat{أجـ}) - ق(\widehat{بد})]$

$س = \frac{1}{2}[١١٥° - ٤٥°]$

$= \frac{1}{2}[٧٠] = ٣٥°$

(٣)

$(س+٧) = \frac{1}{2}[ق(\widehat{بد}) - ق(\widehat{بجـ})]$

$= \frac{1}{2}[١٥٤ - ٧٠] = \frac{1}{2} \times ٨٤ = ٤٢°$

$س + ٧ = ٤٢$ ، $س = ٤٢ - ٧$

$\therefore س = ٣٥$

(٤)

$\because$ قياس الدائرة $= ٣٦٠°$ ، $ق(\widehat{بجـ}) = س$

$\therefore ق(\widehat{بدجـ}) = ٣٦٠ - س°$

$\therefore ٧٠ = \frac{1}{2}[ق(\widehat{بدجـ}) - ق(\widehat{بجـ})]$

$\frac{1}{2}[٣٦٠ - س - س] = ٧٠$

$\frac{1}{2}[٣٦٠ - ٢س] = ٧٠$ (×٢)

$٣٦٠ - ٢س = ١٤٠$

$-٢س = ١٤٠ - ٣٦٠$

$-٢س = -٢٢٠$

$\therefore س = \frac{-٢٢٠}{-٢} = ١١٠°$

ملحوظة

إذا كان ق م (أ) = ق ن (أ) فإن
أ تقع على المحور الأساسي للدائرتين م ، ن

وإذا كان ق م (أ) = ق ن (أ)
، ق م (ب) = ق ن (ب)
فإن $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن

مثال ٦

دائرتان م ، ن متماستان من الخارج في أ ، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن ، $\overrightarrow{بج}$ يقطع الدائرة م في ج ، ء ، $\overrightarrow{به}$ يقطع الدائرة ن في هـ ، و على الترتيب

المطلوب

(١) اثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن

(٢) إذا كان ق م (ب) = ٣٦ ، بج = ٤ سم ، هـو = ٩ سم أوجد طول كلاً من $\overline{جء}$ ، $\overline{أب}$ ، $\overline{به}$

الحل

∵ أ تقع على الدائرة م
، أ تقع على الدائرة ن
∴ ق م (أ) = ق ن (أ) = ٠

، ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ
∴ ق م (ب) = $(أب)^2$

، ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة ن عند أ
∴ ق ن (ب) = $(أب)^2$
∴ ق ن (ب) = $(أب)^2$
∴ ق م (ب) = ق ن (ب)
∴ $\overleftrightarrow{أب}$ محور أساسي للدائرتين م ، ن # أولاً

∵ ق م (ب) = بج × بء
∴ ٣٦ = ٤ × بء
∴ بء = ٩ سم ∴ جء = ٥ سم

∵ $(أب)^2$ = بج × بء
= ٤ × ٩ = ٣٦
∴ أب = ٦ سم

، ∵ $(أب)^2$ = به × بو
٣٦ = (به)(به + ٩)
$(به)^2$ + ٩(به) − ٣٦ = ٠
(به + ١٢)(به − ٣) = ٠
∴ به = ٣ سم

الادهم فى الرياضيات
٥٠
١ث هندسة ترم ١
الواجب
١ أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة للدائرة م
١ م أ = ٧ سم ، نق = ٦ سم
٢ م أ = ١٠ سم ، نق = ١٠ سم
٣ م أ = ٨ سم ، نق = ٩ سم
٢ حدد موضع كل من أ ، ب ، جـ إذا كان طول نصف قطر الدائرة = ١٠ سم
١ ق م (أ) = ٩٦
٢ ق م (أ) = صفر
٣ ق م (أ) = -٣٦
٣ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة = ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة = ٤٠٠ فأوجد طول نصف قطر الدائرة.
٤ أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس
١٠٠°
٦٠°
س
١١٠°
١٣٠°
هـ
٢س
٧س
١١س
١٧٥°
٩٥°
س+١٠
٥ ب جـ مماس
أوجد
١ طول نصف قطر الدائرة
٢ مساحة المثلث أ ب جـ
١٦ سم
٩ سم
٦ فى الشكل المقابل
١ أوجد طول جـ د ، جـ ص
٢ أثبت أن أ ب محور أساسى للدائرتين.
الفكرة لا تثبت أن ق م (أ) = ق ن (أ) = صفر ، ق م (ب) = ق ن (ب) = صفر
٤ سم
٩ سم
٥ سم
٥
(٣س+٥)
٥٥°
٦٥°
٦
٥٠°
٢س
انتهى بفضل الله وتوفيقه منهج الفصل الدراسى الأول
مع أمنيات وأرجو تمنياتى القلبية بالنجاح والتفوق
محمد أدهم
أ/ محمد أدهم
٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧